Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1963-64.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 2, (algebra og geometri).

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

$1^\circ$ Idet f og g er lineære afbildninger af et vektorrum $(U,+,L)$ ind i et vektorrum $(V,+,L)$, skal man vise, at

$$(f+g)(U) \subseteq f(U) + g(U).$$

$2^\circ$ Anfør et eksempel, hvor

$$(f+g)(U) \subset f(U) + g(U),$$

samt et eksempel, hvor $\dim f(U) = \dim g(U) = 1$ og

$$\dim (f+g)(U) = \dim f(U) + \dim g(U).$$

Opgave nr. 2.

Lad $f: A \to \grave{R}^2$ være den ved

$$(x,y) \to \left(\frac{1-y}{x}, \frac{1+y}{x}\right)$$

bestemte afbildning af halvplanen $A = \{(x,y) \in \grave{R}^2 \mid x > 0\}$ ind i $\grave{R}^2$.

$1^\circ$ Bestem billedmængden $f(A)$, vis at f er injektiv og angiv den inverse afbildning $f^{\circ-1}$.

$2^\circ$ Bestem for hvert $h \in \grave{R}$ originalmængden $f^{\circ-1}(B_h)$, hvor

$$B_h = \{(u,v) \in \grave{R}^2 \mid v^2 - u^2 = h\},$$

og for hvert $k \in \grave{R}$ billedmængden $f(C_k)$, hvor

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx \wedge x > 0\}.$$

Tegn skitser af $B_1$, $f^{\circ -1}(B_1)$, $C_{\frac{1}{2}}$ og $f(C_{\frac{1}{2}})$ tolket som punktmængder i planen ved hjælp af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

## Opgave nr. 3.

I rummet er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$.

$1^\circ$ Find en parameterfremstilling for hver af de rette linier $m_1$ og $m_2$, der begge går gennem O og står vinkelret på vektoren $\underline{e}_1+\underline{e}_2+\underline{e}_3$, og hvor $m_1$ ligger i 13-koordinatplanen, medens $m_2$ ligger i 23-planen.

$2^\circ$ Bestem vinklen mellem linierne $m_1$ og $m_2$, idet hver af dem tænkes orienteret, så dens vinkel med 3-koordinataksen er spids.

$3^\circ$ Med $\underline{f}_1$ og $\underline{f}_2$ betegnes enhedsvektorerne på de orienterede linier $m_1$ og $m_2$, medens $\underline{f}_3 = \underline{e}_1+\underline{e}_2+\underline{e}_3$. Udtryk længden af en vilkårlig vektor $\underline{v}$ ved dens koordinater $y_1,y_2,y_3$ med hensyn til basen $(\underline{f}_1,\underline{f}_2,\underline{f}_3)$.

## Opgave nr. 4.

$1^\circ$ Lad $(G,\$)$ være en gruppe, og lad der i G være givet en ækvivalensrelation $\sim$ , som harmonerer med kompositionen $\$$. Idet gruppens neutrale element betegnes med e, skal man vise, at

$$H = \{x \in G \mid x \sim e\}$$

er en normal undergruppe i $(G,\$)$. Vis endvidere, at den givne ækvivalensrelation svarer til klasseinddelingen af G bestående af sideklasserne til H.

(Opgaven fortsættes)

$2^\circ$ Hvilke ækvivalensrelationer harmonerer med kompositionen i en gruppe med 13 elementer?

Opgave nr. 5.

Lad f være en lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum (V,+L) ind i sig selv, lad $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ være en basis for (V,+,L), og lad f med hensyn til denne basis have matrixligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Det forudsættes endvidere, at det af $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{n-1}$ udspændte underrum U er invariant ved f: V → V.

$1^\circ$ Hvorledes giver den sidstnævnte forudsætning sig til kende i matricen?

$2^\circ$ Vis, at f: V → V har en egenværdi, og at det karakteristiske polynomium for f: V → V (dvs. for denne afbildnings matrix med hensyn til en basis i V) er deleligt med det karakteristiske polynomium for f: U → U. (Med f: U → U menes restriktionen af f til det invariante underrum U betragtet som afbildning af U ind i sig selv.)

- oOo -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af illustrerende figurer.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.

Mat. 1, AG, skr. prøve vinteren 1963-64

## Rettelse.

Opgave nr. 5, anden linie.

"(V,+L)", læs: "(V,+,L)".