Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1963.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2, (algebra og geometri).

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ i rummet er to planer π_1 og π_2 givet ved ligningerne

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \quad \text{og} \quad 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0.$$

1° Find en parameterfremstilling for de to planers skæringslinie l.

2° Find koordinaterne til den retvinklede projektion B af punktet A(2,-19,11) på linien l, samt til den retvinklede projektion C af A på planen π_2.

Opgave nr. 2.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1					a_5	
a_2						
a_3						
a_4		a_1	a_2			a_3
a_5		a_4	a_1			
a_6						

Ovenstående er en delvis udfyldt gruppetavle for en kommutativ gruppe $(G,\$)$ med elementerne $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

1° Opskriv den fuldstændige gruppetavle for $(G,\$)$. Der forlanges ikke en fuldstændig beskrivelse af udfyldningens forløb, men anfør, hvilke principper De benytter.

2° Undersøg, om den ved a_5 bestemte translation $x \to a_5 \$ x$, $x \in G$, er en lige eller ulige permutation af G.

3° Find samtlige undergrupper i $(G,\$)$.

Opgave nr. 3.

Ud fra en relation R i en mængde A bestemmes to relationer R_1 og R_2 i A ved

$$(x,y) \in R_1 \iff (x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R,$$
$$(x,y) \in R_2 \iff (x,y) \in R \wedge x \neq y.$$

1° Vis, at hvis R er asymmetrisk, så er $R_1 = R_2$.

2° Vis, at hvis R er transitiv, så er R_1 en ikke-refleksiv ordningsrelation.

3° Vis, at R_2 er en ikke-refleksiv ordningsrelation, hvis og kun hvis R er transitiv og asymmetrisk.

Opgave nr. 4.

1° En lineær afbildning f af et n-dimensionalt vektorrum $(V,+,L)$ ind i sig selv har med hensyn til en basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$ matrixligningen

$$\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}_| .$$

Angiv summen af elementerne i en række i matricen $\underline{\underline{A}}$ i tilfælde af, at f har vektoren $\underline{e} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \ldots + \underline{e}_n$ som egenvektor med tilhørende egenværdi $\lambda \in L$. Angiv dernæst en betingelse vedrørende rækkerne i matricen $\underline{\underline{A}}$, som er nødvendig og tilstrækkelig for, at afbildningen f har vektoren $\underline{e} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \ldots + \underline{e}_n$ som egenvektor.

2° Om mængden af regulære (n×n)-matricer $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n,n}$ med elementer fra et tallegeme L, hvor hver matrix har den egenskab, at de forskellige rækker har samme elementsum,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{1j} = \sum_{j=1}^{n} b_{2j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} b_{nj} ,$$

skal man vise, at den med matrixmultiplikation som komposition er en gruppe. (Man kan med fordel benytte det under 1° fundne.)

3° Danner de regulære (n×n)-matricer, hvor de forskellige søjler har samme elementsum, ligeledes en gruppe med matrixmultiplikation som komposition?

Opgave nr. 5.

I vektorrummet $(V,+,\dot{R}) = (\hat{F}(\dot{R} \to \dot{R}),+,\dot{R})$ af reelle funktioner, hver defineret på mængden $\dot{R}$ af reelle tal, betragtes det af funktionerne cos t og sin t frembragte underrum U.

1° For hvert reelt tal k betragtes den lineære afbildning $F_k:(V,+,\dot{R}) \to (V,+,\dot{R})$, hvor til hver funktion $f(t) \in V$ svarer funktionen $f(t + k)$. Vis, at U er invariant ved hver af afbildningerne F_k.

2° I det følgende betragtes, med bevarelse af betegnelsen F_k, restriktionerne til U af ovennævnte afbildninger, og disse restriktioner opfattes som afbildninger af U ind i sig selv, altså $F_k: U \to U$. Angiv matrixligningen med hensyn til basen

$(\cos t, \sin t)$ i U for hver af afbildningerne $F_k: U \to U$.

3° Undersøg, om $F_0: U \to U$ og $F_{\frac{\pi}{2}}: U \to U$ er lineært uafhængige i vektorrummet $\mathrm{Hom}(U,U)$ af alle lineære afbildninger af $(U,+,\dot{R})$ ind i sig selv. Bestem rangen af den delmængde $M = \{F_k \mid k \in \dot{R}\}$ af $\mathrm{Hom}(U,U)$, der udgøres af samtlige afbildninger $F_k: U \to U$.

\- oOo -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.