Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1962-63.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1, (algebra og geometri).

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 7 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Med A og B betegnes delmængder af en universalmængde E. Undersøg, om der gælder

$$A \cap B = \emptyset \iff A \cap C(B \cap CA) = A \setminus B.$$

Opgave nr. 2.

Med D betegnes delmængden $\grave{R} \setminus \{-1,0,1\}$ af mængden $\grave{R}$ af reelle tal. Lad $f_i : D \to D$, $i = 1,2,3,4$ betegne de reelle funktioner, der er bestemt ved

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = -\frac{1}{t}, \quad f_3(t) = \frac{1-t}{1+t} \quad \text{for } t \in D$$

og

$$f_4 = f_3 \circ f_2.$$

Undersøg, om disse funktioner med sammensætning som komposition danner en gruppe.

Opgave nr. 3.

I rummet E_3 er givet et punkt 0, en linie l med parameterfremstillingen $\underline{x} = \overrightarrow{0A} + s\underline{u}$, $s \in \mathbb{R}$, hvor $\underline{u} \neq \underline{0}$, samt en vektor $\underline{v} \neq \underline{0}$. Der søges en linie m, som går gennem 0, har netop ét punkt fælles med l og er vinkelret på $\underline{v}$.

Angiv nødvendige og tilstrækkelige betingelser (udtrykt ved de givne vektorer $\underline{a} = \overrightarrow{0A}$, $\underline{u}$ og $\underline{v}$) for, at der findes netop én sådan linie m, og find i dette tilfælde en parameterfremstilling for m.

Undersøg, hvilke muligheder der foreligger, når betingelserne ikke er opfyldt.

Opgave nr. 4.

Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være $(n \times n)$-matricer, hvis elementer er tal. Det forudsættes, at $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er symmetriske, altså at $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{B}}$. Vis, at $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er ombyttelige, hvis og kun hvis $\underline{\underline{AB}}$ er symmetrisk.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en diagonalmatrix med diagonalelementerne $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Vis, at hvis $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ er indbyrdes forskellige, vil hver med $\underline{\underline{A}}$ ombyttelig matrix $\underline{\underline{B}}$ være en diagonalmatrix. Bestem endvidere for $n > 2$ samtlige med $\underline{\underline{A}}$ ombyttelige matricer $\underline{\underline{B}}$, når det er givet, at $\alpha_1 = \alpha_2$ og at $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ er indbyrdes forskellige.

Opgave nr. 5.

Udtryk determinanten

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & 0 & & & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ 0 & & & 0 & -1 & 1 & (n-2)^2 & 0 \\ 0 & & & & 0 & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

ved n og tilsvarende determinanter af lavere orden, og vis derefter at $D_n = n!$.

Opgave nr. 6.

I rummet E_3 er valgt et affint koordinatsystem $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$. En affin afbildning φ af rummet ind i sig selv er bestemt på følgende måde: $\varphi(0) = 0'$ er punktet med koordinatsættet $(1,1,1)$, og ved den af φ inducerede lineære afbildning $f_\varphi : V_3 \rightarrow V_3$ er $f_\varphi(\underline{e}_1) = \underline{e}_2 + \underline{e}_3$, $f_\varphi(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$ og $f_\varphi(\underline{e}_3) = \underline{e}_1$.

Find egenværdierne og tilhørende egenvektorer for f_φ.

Vis, at φ har netop ét fixpunkt F, og bestem dette samt originalmængden $\varphi^{-1}(F)$.

Opgave nr. 7.

Lad f og g være lineære afbildninger af et n-dimensionalt vektorrum $(U_n,+,L)$ ind i et m-dimensionalt vektorrum $(V_m,+,L)$. Med h betegnes den lineære afbildning $f+g:U_n \to V_m$. Vis enten, at

$$\dim h(U_n) \leqq \dim f(U_n) + \dim g(U_n),$$

eller, hvad der kommer ud på det samme, at der for vilkårlige $(m \times n)$-matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ med elementer fra L gælder

$$\mathrm{rg}(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \leqq \mathrm{rg}\,\underline{\underline{A}} + \mathrm{rg}\,\underline{\underline{B}}.$$