Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1962.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

(Matematisk analyse).

Alle hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Find konvergensradius for potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n z^n,$$

og undersøg tillige, hvis konvergensradius er endelig, om rækkerne konvergerer på konvergenscirklens periferi.

Opgave nr. 2.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$((\sinh x - 1)D^2 - \cosh x\, D + D^0)\chi = \cosh x - x.$$

I 1960-61-noternes formulering skrives ligningen

$$(\sinh x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - \cosh x\,\frac{dy}{dx} + y = \cosh x - x.$$

Opgave nr. 3.

Undersøg, om de ved

$$f(x) = e^{-x}\sin e^x,\ g(x) = e^{-x}\sin e^{2x}$$

definerede afbildninger $f,g : [0,\infty[$ ind i $\mathring{R}$ er ligelig kontinuerte.

(fortsættes)

(fortsat)

Opgave nr. 4.

Find alle punkter $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^2$, som har en omegn, i hvilken ligningen

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 = 1$$

éntydigt bestemmer en implicit given funktion $x_2 = f(x_1)$, som tilfredsstiller betingelsen $Df(x_1^*) = 0$.

Opgave nr. 5.

Lad $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ være et interval. Lad $\alpha : [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være strengt voksende, og lad $f : [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert og ikke konstant. Vis de skarpe uligheder

$$(\alpha(b) - \alpha(a))m < \int_a^b f(x)d\alpha(x) < (\alpha(b) - \alpha(a))M,$$

hvor $m = \inf f([a,b])$ og $M = \sup f([a,b])$.

Opgave nr. 6.

Vis, at

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos(y \sin t)dt = 0.$$