GM: 1963 - 1966/67

Københavns Universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1962.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 1.

(Algebra og geometri).

Alle hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 7 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Et tetraeder OABC i rummet E_3 tænkes bestemt ved hjørnespidsen O og de tre lineært uafhængige geometriske vektorer $\underline{a} = \vec{OA}$, $\underline{b} = \vec{OB}$, $\underline{c} = \vec{OC}$.

Vis, at vektoren

$$\underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b}$$

er parallel med tetraedrets fra O udgående højde.

Find denne højdes længde udtrykt ved vektorerne $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$.

Opgave nr. 2.

Om fire rette linier i planen E_2 forudsættes, at de skærer hinanden to og to, og at de seks skæringspunkter er indbyrdes forskellige. Der findes da tre liniestykker, som hvert forbinder to af skæringspunkterne, og som ikke ligger på nogen af de fire givne linier.

Bevis ved regning i et hensigtsmæssigt valgt affint koordinatsystem, at disse tre liniestykkers midtpunkter ligger på en ret linie.

(fortsættes)

(fortsat)

Opgave nr. 3.

En lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum $(V_n,+,R)$ ind i sig selv er med hensyn til en basis for rummet bestemt ved matricen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}(b_1 \ \ldots \ b_n),$$

hvor $(a_1,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0)$ og $(b_1,\ldots,b_n) \neq (0,\ldots,0)$ er reelle talsæt.

Angiv billedrummet ved afbildningen, dens kerne, egenværdier og egenrum.

Opgave nr. 4.

Lad $f : V_n \rightarrow V_n$ være en lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum $(V_n,+,L)$ ind i sig selv. Afbildningens rang betegnes med r og dens kerne med K.

Vis, at billedet ved f af et k-dimensionalt underrum V_k i V_n har dimensionen

$$\dim f(V_k) = k - \dim(K \cap V_k).$$

Vis endvidere, at

$$k - n + r \leqq \dim f(V_k) \leqq k,$$

og angiv nødvendige og tilstrækkelige betingelser, som V_k må opfylde, for at lighedstegnet gælder det første sted, og for, at det gælder det andet sted.

Opgave nr. 5.

For hvert komplekst talpar $(a,b) \neq (0,0)$ dannes den komplekse (2×2)-matrix

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix},$$

(fortsættes)

(fortsat)

hvor $\bar{a}$ og $\bar{b}$ betegner de til a og b konjugeret komplekse tal.

Vis, at disse matricer danner en gruppe med matrixmultiplikationen som kompositionsforskrift.

Vis endvidere, at denne gruppe har en undergruppe, som er isomorf med $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$, og en undergruppe, som er isomorf med $(\mathbb{C} \setminus \{0\},\cdot)$.

Opgave nr. 6.

Lad $(G,\$)$ være en gruppe og $H \subseteq G$ og $K \subseteq G$ normale undergrupper.

Vis, at der til hvert par h,k af elementer $h \in H$ og $k \in K$ findes et element $h' \in H$ og et element $k' \in K$, således at

$$h \,\$\, k = k \,\$\, h' = k' \,\$\, h.$$

Vis, at mængden

$$H \,\$\, K = \{h \,\$\, k \mid h \in H \ \wedge \ k \in K\}$$

er en undergruppe i G, og at den er normal.

Opgave nr. 7.

Undersøg, om mængden af de lineære afbildninger af det todimensionale reelle talrum $(\mathbb{R}^2,+,\mathbb{R})$ ind i sig selv, ved hvilke delmængden $\mathbb{Z}^2$ af par af hele tal afbildes ind i sig selv, er numerabel.

Undersøg, om mængden af alle afbildninger af mængden $\mathbb{Z}^2$ ind i sig selv er numerabel.