Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik 1 GA

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af i alt 6 opgaver og er på 3 sider. Af opgaverne 5 og 6 må kun én afleveres til bedømmelse. Opgave 5 er dækket af pensum for 1998, mens opgave 6 er dækket af pensum for de foregående år. De to opgaver vil blive vægtet ens ved bedømmelsen. Besvarelsen vil i øvrigt ved bedømmelsen blive helhedsvurderet.

Opgave 1 (40 points)

Lad $L \subseteq \mathbb{R}^4$ være løsningmængden for det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + \ \ 3x_3 - 19x_4 &= \ 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 16x_3 - \ \ 6x_4 &= \ 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ 8x_3 + \ \ 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

En god fe fortæller dig, at de to matricer

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -19 \\ -4 & -2 & -16 & -6 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kan føres over i hinanden ved rækkeoperationer. Du må gerne benytte feens oplysning.

1. Hvad er dimensionen af underrummet L?
2. Find en basis for L.
3. Find en basis for underrummet S bestående af alle $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ for hvilke det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + \ \ 3x_3 - 19x_4 &= b_1 \\ -4x_1 - 2x_2 - 16x_3 - \ \ 6x_4 &= b_2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ 8x_3 + \ \ 3x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

   har en løsning.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (15 points)

I denne opgave benytter vi det sædvanlige prik produkt

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

som indre produkt i vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

Lad $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ og $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ være de to vektorer givet ved

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1) \text{ og } \boldsymbol{v}_2 = (-1,1,1).$$

1. Udregn $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$.
2. Beregn ortogonalprojektionen af $\boldsymbol{v}_2$ på $\boldsymbol{v}_1$.
3. Find en ortogonal basis for det 2-dimensionale underrum

$$S = \text{span}\,\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$$

af $\mathbb{R}^3$.

Det engelske ord for ortogonalprojektion er "orthogonal projection" eller blot "projection".

Opgave 3 (10 points)

Find et $\delta > 0$, så

$$|x-5| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{2x-1} - 3\right| < \frac{1}{10}.$$

Opgave 4 (15 points)

Lad $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ være den naturlige logaritmefunktion og $a > 0$ et positivt tal.

1. Find ligningen for tangenten i punktet $(a, \ln a)$ til grafen for den naturlige logaritme funktion. Tegn grafen for den naturlige logaritmefunktion og tangenten i punktet $(a, \ln a)$ i samme koordinatsystem.
2. Sæt

$$g(x) = \ln x - \ln a - \frac{1}{a}(x-a)\,, \quad x > 0,$$

og vis, at $x = a$ er globalt maksimumspunkt for g med maksimumsværdi $g(a) = 0$.

3. Begrund, at grafen for den naturlige logaritmefunktion ligger under (eller på) tangenten i ethvert punkt.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Af opgaverne 5 og 6 må kun én afleveres til bedømmelse. Opgave 5 er dækket af pensum for undervisningen i 1998, mens opgave 6 er dækket af pensum for de foregående år. Det er valgfrit for den enkelte studerende hvilken af opgaverne, der afleveres.

Opgave 5 (20 points)

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den lineære afbildning, der har matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

med hensyn til basen $\{(1,0),\ (0,1)\}$ for $\mathbb{R}^2$.

1. Vis, at f er en isomorfi og find matricen for den inverse f^{-1}.
2. Find matricen for $\operatorname{proj} \circ f$, hvor $\operatorname{proj} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er den lineære afbildning givet ved $\operatorname{proj}(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ for alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Opgave 6 (20 points)

Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{\ln n}{n}.$$

a) Gør rede for at rækken er alternerende.

b) Vis, at rækken ikke er absolut konvergent.

c) Gør rede for at rækken er konvergent med sum $s < \frac{1}{2}\ln 2$.

Her er ln den naturlige logaritmefunktion.

Opgavesættet er slut.