Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-98

Matematik 1 GA

(Alternativt, midtvejsprøve)

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 8 opgaver og er på 3 sider.

Opgave 1 (15 points)

Lad S og T være de to underrum af $\mathbb{R}^4$ givet ved

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$
$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

a) Redegør for, at $S \cap T$ er et underrum af $\mathbb{R}^4$.

b) Find en basis for $S \cap T$.

Opgave 2 (20 points)

Vi betragter det euklidiske rum $\mathbb{R}^3$ med det sædvanlige indre produkt, prikproduktet, givet ved

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

for alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ og $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Sæt $L = \operatorname{span}\{(1,1,1)\}$ og $U = L^\perp$. (Det oplyses at U er et underrum og består af alle vektorer i $\mathbb{R}^3$, der er ortogonale på alle vektorer i L.)

a) Redegør for, at

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

b) Vis, at ortogonalprojektionen på L er givet ved

$$\operatorname{proj}_L(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(1,1,1)$$

for alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

c) Vis, at

$$(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{proj}_L(x_1, x_2, x_3) + \operatorname{proj}_U(x_1, x_2, x_3)$$

for alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (15 points)

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum og U_1 og U_2 to underrum af V.

Antag, at enhver vektor $\boldsymbol{v} \in V$ på mindst én måde kan skrives som en sum, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, af en vektor $\boldsymbol{u}_1 \in U_1$ og en vektor $\boldsymbol{u}_2 \in U_2$.

a) Lad B_1 være en basis for U_1 og B_2 en basis for U_2. Vis, at

$$\operatorname{span}(B_1 \cup B_2) = V,$$

altså, at $B_1 \cup B_2$ er en frembringermængde for V.

b) Vis, f.eks. ved at bruge sammenligningssætningen (Comparison Theorem), at

$$\dim U_1 + \dim U_2 \geq \dim V.$$

Opgave 4 (10 points)

Udregn arealet af området, som i polære koordinater er givet ved

$$0 \leq r \leq 1 + \cos 3\theta\ , \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Opgave 5 (10 points)

Det oplyses at ligningen

$$y^4 - 2xy + x^2 = 0$$

bestemmer y som en C^∞-funktion $y = f(x)$ i et interval omkring $x = 1$ med $f(1) = 1$.

Bestem 2. Taylor polynomium for f med udviklingspunktet $x = 1$.

Opgave 6 (10 points)

Vis, at

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 7 (10 points)

Lad $f(x) = x^{3/2}$ for $x \geq 0$ og lad $a \geq 0$.

Giv ved hjælp af middelværdisætningen et udtryk for funktionstilvæksten

$$f(a+2) - f(a).$$

Vis dernæst at dobbeltuligheden

$$3\sqrt{x} < (x+2)^{3/2} - x^{3/2} < 3\sqrt{x+2}\,,$$

er gyldig for alle $x \geq 0$.

Opgave 8 (10 points)

a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

er konvergent, f.eks. ved at sammenligne med en konvergent p-række.

b) Er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

konvergent eller divergent. Begrund dit svar.