Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik 1 GB (gammelt pensum)

Opgaver til besvarelse i 4 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Sættet er på 2 sider og består af 5 opgaver.

Markér på besvarelsen, at der er tale om gammelt pensum.

Opgave 1 (25 points)

Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, der har matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

med hensyn til den ordnede basis $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

1. Vis, at $(1,0,2)$ er en egenvektor for A med egenværdi 6.
2. Find matricen for T med hensyn til den ordnede basis $\{(1,0,0),\ (1,1,1),\ (1,0,2)\}$.
3. Find det karakteristiske polynomium for A.
4. Er A diagonaliserbar ?

Opgave 2 (25 points)

1. Skriv 105 og 350 som produkter af primtal.
2. Find største fælles divisor og mindste fælles multiplum,

$$\operatorname{sfd}(105, 350) \quad \text{og} \quad \operatorname{mfm}(105, 350),$$

af 105 og 350.

Lad $\varphi : \mathbb{Z}/350 \to \mathbb{Z}/350$ være afbildningen givet ved

$$\varphi(x) = 105x$$

for alle $x \in \mathbb{Z}/350$.

3. Redegør for at φ er en gruppehomomorfi.
4. Find ordenen af kernen for φ.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (10 points)

Betragt mængden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ givet ved ulighederne

$$\begin{aligned} 1 \le xy \le 2 \\ x \le y \le 2x. \end{aligned}$$

(a) Skitsér D i en (x, y)-plan.

Vi indfører nye koordinater (u, v) givet ved

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

(b) Gør rede for at D i koordinaterne (u, v) beskrives ved

$$\begin{aligned} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2. \end{aligned}$$

(c) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D \frac{y^3}{x}\, dxdy.$$

Opgave 4 (15 points)

Find den største og den mindste værdi funktionen $f(x, y) = e^{xy}$ antager på mængden

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}(x-2)^2 + y^2 \le 1\}.$$

Opgave 5 (25 points)

Betragt ligningen

$$z - \sin(y - zx) = 0 \qquad (*)$$

i de variable (x, y, z).

(a) Vis, at punktet $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ tilfredsstiller ligningen $(*)$.

Det oplyses, at ligningen $(*)$ i en omegn U af $(0, 0)$ bestemmer z som en C^1-funktion, $z = f(x, y)$, af (x, y).

(b) Bestem taylorpolynomiet af grad højst 1 for f i udviklingspunktet $(0, 0)$.

(c) Vis, at de partielle afledede af funktionen $f(x, y)$ opfylder

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$