Eksamen Mat 1GB F99 (4 timer)

Opgaver til besvarelse i 4 timer
Alle hjælpemidler er tilladte
Opgavesættet består af 5 opgaver og er på 2 sider
Besvarelserne af alle opgaverne skal indeholde en begrundelse for fremgangsmåden.

Opgave	1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	4	5(a)	5(b)	5(c)
Point	15	10	10	10	5	10	15	5	10	10

Opgave 1.

(a) Vis at matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar og find en invertibel 3×3 matrix P så $P^{-1}AP$ er diagonal.

(b) Find løsningen til begyndelseværdiproblemet

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \\ \phi_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 2.

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n}.$$

(a) Bestem alle $x \in \mathbf{R}$ for hvilke rækken er *absolut* konvergent og alle $x \in \mathbf{R}$ for hvilke rækken er divergent.

(b) Find summen af rækken for alle $x \in \mathbf{R}$ for hvilke den er absolut konvergent.

Opgave 3.

Betragt fladen $S \subset \mathbf{R}^3$ parametriseret ved

$$\begin{pmatrix} x(r,\theta) \\ y(r,\theta) \\ z(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}, \qquad 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1.$$

(a) I hvilke punkter er fladen glat?

(b) Lad $f(x,y,z) = (1+z)\sqrt{1+x^2+y^2}$. Find fladeintegralet $\iint\limits_S f dS$.

Opgave 4.

Find den største og den mindste værdi funktionen $f(x,y) = e^{xy}$ antager på mængden $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{4}(x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Opgave 5.

Betragt ligningen

$$y - \sin(x - yt) = 0 \tag{$*$}$$

i de variable (t,x,y).

(a) Vis at punktet $(t_0, x_0, y_0) = (0,0,0)$ løser ligningen $(*)$.

(b) Vis at $(*)$ definerer y implicit som en C^1-funktion af (t,x) for (t,x,y) nær $(0,0,0)$.

(c) Vis at de partielle afledede af funktionen $y(t,x)$ defineret i (b) opfylder relationen

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + y(t,x)\frac{\partial y}{\partial x}(t,x) = 0$$

for (t,x) nær $(0,0)$.