Reeksamen Mat 1GB F99 (4 timer)

Opgaver til besvarelse i 4 timer
Alle hjælpemidler er tilladte
Opgavesættet består af 5 opgaver og er på 2 sider
Besvarelserne af alle opgaverne skal indeholde en begrundelse for fremgangsmåden.

Opgave	1(a)	1(b)	1(c)	1(d)	2	3(a)	3(b)	4(a)	4(b)	4(c)	5(a)	5(b)
Point	5	5	5	5	15	10	10	10	10	5	10	10

Opgave 1.

Betragt kurven C i $\mathbf{R}^3$ givet ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(3t), \cos(3t), 2t^{3/2}), \qquad 0 \le t \le 2.$$

(a) I hvilke punkter er kurven glat?

(b) Find en parametrisering for tangenten til kurven i punktet svarende til parameterværdien $t = \pi/3$.

(c) Find længden af kurven.

(d) Lad $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ være vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z(x^2 + y^2))$. Lad $\mathbf{T}$ være et enhedstangentfelt langs C som peger i samme retning som $\mathbf{r}'(t)$. Find arbejdsintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$.

Opgave 2.

Find maximum og minimum for funktionen $f(x, y) = e^x(1 - \cos y) + x^3$ på mængden $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, \ -\pi \le y \le \pi\}$.

Opgave 3.

(a) Vis at ligningen $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$ definerer z implicit som en funcktion $z = f(x, y)$ for (x, y) nær $(0, 1)$ med $f(0, 1) = 1$.

(b) Find den lineære tilnærmelse til funktionen f fra (a) i punktet $(0, 1)$.

Opgave 4.

(a) Find egenværdierne og tilhørende egenvektorer for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Vis at hvis $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ er et maximums- eller minimumspunkt for funktionen

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy$$

under bibetingelsen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ så er vektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ en egenvektor for matricen A fra (a).

(c) Find max og min for funktionen f fra (b) under bibetingelsen $x^2+y^2+z^2 = 1$. (Du må godt benytte dig af resultatet fra (b) selvom du ikke har besvaret det spørgsmål.)

Opgave 5.

Betragt potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ (hvor $0! = 1$).

(a) Vis at rækken er konvergent for alle $x \in \mathbf{R}$.

(b) Vis at funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ opfylder differentialligningen

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0.$$