Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik 1 GA

Opgaver til besvarelse i 4 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgavesættet består af 5 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (25 points)

Matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kan føres over i hinanden ved rækkeoperationer.

1. Find dimensionen af løsningsrummet L for det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   med koefficientmatrix $\mathbf{A}$.
2. Find en basis for L.
3. Find en basis for søjlerummet (column space) for $\mathbf{A}$.
4. Har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   en løsning?

Opgave 2 (20 points)

Lad $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, og $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ være den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$.

1. Find matricen for en isomorfi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, så

$$T(\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}.$$

2. Lad U være et vilkårligt 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^3$. Redegør for, at der findes en isomorfi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, så $T(\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) = U$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points)

1. Vis, at
$$\operatorname{span}\{(1,1,1),\ (1,1,2)\} = \{x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2\}.$$

2. Begrund, at ingen (3×4)-matricer $\mathbf{X}$ opfylder ligningen
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Find de vektorer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningen
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$
har en løsning $\mathbf{X}$ i mængden af (3×4)-matricer.

Opgave 4 (15 points)

Brug middelværdisætningen til at vise, at
$$\sin x < x,$$
når $0 < x < \pi$.

Opgave 5 (20 points)

Lad $f :]1, \infty[\to]0, \infty[$ være funktionen givet ved
$$f(x) = x^{(x^2)},\ x > 1.$$

1. Vis, at $f'(x) = xf(x)(1 + 2\log x)$ (hvor log er den naturlige logaritmefunktion).
2. Redegør for, at f har en invers funktion f^{-1}, som er differentiabel.
3. Vis, at $f(2) = 16$.
4. Find $(f^{-1})'(16)$.