Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik 1 GB

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (30 points)

Lad B_1 og B_2 være de to delmængder

$$B_1 = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$
$$B_2 = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$$

af vektorrummet $\mathbb{R}^3$ og

$$C = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

den kanoniske basis for $\mathbb{R}^3$.

1) Redegør kort for at B_1 og B_2 er baser for $\mathbb{R}^3$.
2) Find koordinaterne for $(1,1,1)$ m.h.t. den ordnede basis B_1.
3) Find koordinattransformationsmatricen P_1 for skiftet fra B_1 til C.
4) Find koordinattransformationsmatricen P_2 for skiftet fra B_2 til C.
5) Find koordinattransformationsmatricen for skiftet fra C til B_2.
6) Find koordinattransformationsmatricen for skiftet fra B_1 til B_2

Koordinattransformationsmatrix for skiftet fra B_1 til C = Change-of-basis matrix changing from the basis B_1 to the basis C.

Opgave 2 (20 points)

Lad $D(n)$ være mængden af alle $(n \times n)$-diagonalmatricer og $S(n)$ mængden af alle symmetriske $(n \times n)$-matricer.

1) Vis, at $\operatorname{tr}(DD) \geq 0$ for alle $D \in D(n)$, og at $\operatorname{tr}(DD) = 0$ kun hvis $D = \mathbf{0}$.
2) Vis, at $\operatorname{tr}(SS) \geq 0$ for alle $S \in S(n)$, og at $\operatorname{tr}(SS) = 0$ kun hvis $S = \mathbf{0}$.

Her betegner $\operatorname{tr}(A)$ sporet (trace) af matricen A, og $\mathbf{0}$ er nulmatricen (zero matrix).
Vink: De to spørgsmål har noget med hinanden at gøre.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points)

Løs begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = x \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 2. \end{cases}$$

Find dernæst $y^{(3)}(1)$ for den løsning til differentialligningen som opfylder $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

Opgave 4 (15 points)

Betragt forskriften

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y^2).$$

a) Angiv det maksimale definitionsområde for f.

b) Bestem og klassificér kritiske punkter for f.

c) Bestem Taylorpolynomiet af grad højst 2 med udvikling i $(1, 1)$.

Opgave 5 (15 points)

Betragt mængden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ givet ved

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}.$$

1) Gør rede for at

$$I = \iint_D \frac{y}{x} dA$$

er et uegentlig integral.

2) Opskriv udtrykkene for begge mulige integrationsrækkefølger til beregning af I som itereret dobbeltintegral.

3) Gør rede for at integralet er konvergent, og bestem dets værdi.