Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1998

Matematik 1 GB

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Sættet er på 2 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (10 points)

$\mathbb{Z}/30$ står for den abelske gruppe af restklasser modulo 30. Kompositionen i $\mathbb{Z}/30$ er givet ved addition.

1) Find et element af orden 2 i $\mathbb{Z}/30$.
2) Find et element af orden 3 i $\mathbb{Z}/30$.
3) Findes der et element af orden 4 i $\mathbb{Z}/30$?

Opgave 2 (20 points)

Lad A være (2×2)-matricen givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Find det karakteristiske polynomium for A.
2) Find egenværdierne og egenvektorerne for A.
3) Find en invertibel matrix P så $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrix.

Opgave 3 (20 points)

Lad $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ være afbildningen fra $\mathbb{P}_2$, vektorrummet af polynomier af grad ≤ 2, til $\mathbb{P}_3$, vektorrummet af polynomier af grad ≤ 3, givet ved $T(p(x)) = xp(x+2)$.

1) Vis, at $T(1) = x$, $T(x) = x^2 + 2x$ og $T(x^2) = x^3 + 4x^2 + 4x$.
2) Vis, at T er lineær.
3) Find matricen for T med hensyn til basen $\{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{P}_2$ og basen $\{1, x, x^2, x^3\}$ for $\mathbb{P}_3$.
4) Find kernen for T.
5) Vis, at billedet $T(\mathbb{P}_2)$ er underrummet span$\{x, x^2, x^3\}$ af $\mathbb{P}_3$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (15 points)

Lad D være det afsluttede område i 1. kvadrant af planen afgrænset af de 4 kurver bestemt ved ligningerne

$$y^2 = x\,, \quad y = x^2\,, \quad x \cdot y = e\,, \quad x \cdot y = e^2\,,$$

hvor e er grundtallet for den naturlige logaritme.

Skitser området D.

Betragt variabelskiftet

$$u = \ln(x \cdot y); \quad v = \ln y.$$

Gør rede for at D kan beskrives ved

$$\begin{aligned} &1 \leq u \leq 2 \\ &\frac{1}{3}u \leq v \leq \frac{2}{3}u. \end{aligned}$$

Beregn dernæst arealet af D.

Opgave 5 (15 points)

Gør rede for at funktionen givet ved forskriften

$$f(x, y) = xy^2$$

antager såvel størsteværdi, S, som mindsteværdi, M, på kurven

$$x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 3\,, \ (x \geq 0\,, \ y \geq 0).$$

Bestem dernæst værdierne S og M.

Opgave 6 (20 points)

Eftervis at funktionerne $y_1(x) = x$ og $y_2(x) = \frac{1}{x}$ begge er løsninger til den homogene differentialligning

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \quad (x > 0).$$

Løs dernæst begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$