Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1998

Matematik 1 GA

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Sættet består af 6 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (15 points)

Vis at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$$

er konvergent, men ikke absolut konvergent.

Opgave 2 (20 points)

Det oplyses at for ethvert $c > 0$ bestemmer ligningen

$$\tan y - y = x + c\,, \quad y \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

y som en C^∞-funktion $y = f(x)$ i et interval omkring $x = 0$.

a. Bestem c så $f(0) = \frac{\pi}{4}$.
b. Med denne værdi af c bestem dernæst $f'(0)$ og gør rede for at f er voksende i et interval omkring $x = 0$.
c) Bestem Taylorpolynomiet for f af grad højst 2 med udviklingspunkt $x = 0$.

Opgave 3 (15 points)

Gør rede for at der findes to funktioner E_1 og E_2 med $\lim_{x\to 0} E_1(x) = \lim_{x\to 0} E_2(x) = 0$, så

$$\sin x = x + E_1(x)x^2$$
$$\cos x = 1 + E_2(x)x$$

for alle x i et interval omkring $x = 0$.
Vis dernæst, ved hjælp af dette eller på anden vis, at

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (10 points)

Angiv alle reducerede (2×3)-echelonmatricer af rang 2. (Ordbog: reduceret echelonmatrix = matrix in reduced row-echelon form.)

Opgave 5 (20 points)

Lad, som sædvanlig, $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrummet af polynomier af grad ≤ 3. Vektorrummet $\mathbb{P}_3$ indeholder de to vektorer $p_1(x) = x - 1$ og $p_2(x) = x^2 + 1$.

a) Vis, at $p_1(x)$ og $p_2(x)$ er lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{P}_3$.

b) Find en basis for $\mathbb{P}_3$, som indeholder de to vektorer $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

Opgave 6 (20 points)

Lad $V = C^0([0,1])$ være vektorrummet af alle kontinuerte funktioner $[0,1] \to \mathbb{R}$. Som sædvanlig benytter vi det indre produkt givet ved

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

for alle vektorer $u, v \in V$. Vektorrummet V indeholder de tre vektorer $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2$ og $u_3(x) = 3x + x^2$.

a) Find $\langle u_1, u_1 \rangle$ og $\langle u_1, u_2 \rangle$.

b) Find en ortonormal basis for underrummet $S = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.