Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1998

Matematik 1 GB

Reeksamination 3. august 1998

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, inklusive lommeregnere, kan medbringes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (15 point)

Betragt nedenstående komplekse potensrækker med tilhørende sumfunktioner:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} = 1 + z + z^4 + z^9 + \cdots$$
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n^2} = z + 4z^4 + 9z^9 + \cdots .$$

(a) Vis at potensrækken for f er absolut konvergent for $|z| < 1$.

(b) Bestem konvergensradius for f's potensrække.

(c) Vis
$$xf'(x) = g(x) \quad \text{for} \quad x \in (-1, 1).$$

(d) Gør rede for at g's potensrække har samme konvergensradius som f's potensrække.

Opgave 2 (25 point)

Betragt de to funktioner

$$f(x, y) = 7x + 9y + x^2$$
$$g(x, y) = (x + 1)(y + 1) - 2$$

for $x \geq 0, y \geq 0$.

(a) Gør rede for at f antager såvel størsteværdi, σ, som mindsteværdi, μ, under bibetingelsen $g(x, y) = 0$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

Det oplyses at Lagrange funktionen

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

har kritisk punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -6)$, og ikke andre.

(b) Bestem σ og μ.

(c) Skitsér området $A = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ g(x, y) \leq 0\}$, og gør rede for at f antager størsteværdi, S, og mindsteværdi, M, på A.

(d) Bestem S og M.

(e) Vis ovennævnte påstand, at Lagrange funktionens eneste kritiske punkt er $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -6)$.

Opgave 3 (10 point)

Lad $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være funktionen med forskrift

$$F(x, t_0, t_1) = (t_0 - x)^2 t_1 - 1.$$

Betragt differentialligningen

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

og lad f være en løsning i et interval I omkring $x = 1$ som opfylder $f(1) = 2$.

(a) Bestem $f'(1)$. (NB! Ligningen kræves ikke løst).

Lad nu $g(x) = f'(x)$ $(x \in I)$.

(b) Vis at $g(x) > 0$ for $x \in I$ og at g er en løsning til differentialligningen

$$2y^{3/2}(y - 1) + \frac{dy}{dx} = 0 \quad (y > 0),$$

f.eks. ved at differentiere ligningen

$$F(x, f(x), f'(x)) = 0 \quad (x \in I).$$

Opgave 4 (20 point)

Lad $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning givet ved

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

1) Find en basis for billedet $\mathrm{im}T = T(\mathbb{R}^2)$.

2) Lad $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ være en lineær afbildning så $\ker S = \mathrm{im}T$. Vis, at $\mathrm{im}S = \mathbb{R}^2$.

3) Giv et eksempel på en lineær afbildning $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ så $\ker S = \mathrm{im}\,T$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5 (30 point)

Lad $\mathbb{M}(2,2)$ være vektorrummet af (2×2)-matricer, og lad $f : \mathbb{M}(2,2) \to \mathbb{M}(2,2)$ være den lineære afbildning givet ved transponering:

$$f(A) = A^t$$

for alle matricer A i $\mathbb{M}(2,2)$.

1) Find matricen, S, for f med hensyn til basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

for $\mathbb{M}(2,2)$.

2) Find en basis for $\mathbb{M}(2,2)$ bestående af egenvektorer for f.
3) Find matricen, D, for f med hensyn til basen af egenvektorer.
4) Find en invertibel matrix, P, så $PD = SP$.
5) Find P^{-1}.