Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-1998

# Matematik 1 afslut

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

## Opgave 1 (25 points)

1) Redegør kort for at

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

er et underrum af $\mathbb{R}^4$.

2) Find dimensionen af $S$.
3) Vis, at $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, hvor $\boldsymbol{e}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, -1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1, -1)$, er en basis for underrummet $S$.
4) Redegør kort for at $T : S \to S$ givet ved $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_3)$ er en lineær afbildning af $S$ ind i $S$.
5) Find $T(\boldsymbol{e}_1)$, $T(\boldsymbol{e}_2)$ og $T(\boldsymbol{e}_3)$ udtrykt som lineærkombinationer af basisvektoren fra $B$.
6) Find en matrix $A$ så $[T(\boldsymbol{v})]_B = A[\boldsymbol{v}]_B$ for alle $\boldsymbol{v} \in S$.
7) Vis, at $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ er en egenvektor for $T$ med egenværdi $-1$.
8) Vis, at $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ er en egenvektor for $T \circ T$ med egenværdi $-1$.
9) Find $T^4 = T \circ T \circ T \circ T$ og $A^4 = AAAA$.

## Opgave 2 (25 points)

Vi betragter $\mathbb{R}^3$ med det sædvanlige indre produkt, prikproduktet.

Lad $A$ være $(3 \times 3)$-matricen givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

hvor $a \in \mathbf{R}$ er et reelt tal. Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den tilhørende lineære afbildning givet ved $T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ for alle $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

1) Redegør kort for, at $T$ er symmetrisk.


Opgave 2 fortsættes på side 2

2) Er $T$ diagonaliserbar?
3) Vis, at $(1,1,1)$ er en egenvektor for $T$ og find egenværdien.
4) Vis, at $\{(-1,0,1), (-1,2,-1)\}$ er en ortogonal basis for underrummet $(1,1,1)^{\perp}$ af alle vektorer ortogonale på $(1,1,1)$.
5) Vis, at $(1,1,1)^{\perp}$ er egenrummet $E_T(a)$ for egenværdien $a$.
6) Find en ortogonal matrix, $P$, og en diagonalmatrix, $D$, så $P^{-1}AP = D$.

## **Opgave 3** (15 points)

Betragt den komplekse potensrække

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$$

a) Bestem konvergensradius, $R$.
b) Lad sumfunktionen være $f(z)$. Vis at for $|z| < R$ gælder

$$f(iz) + f(-iz) = f(-z^2).$$

c) Vis, at $f(\frac{1}{2}i) + f(-\frac{1}{2}i) = \ln(\frac{4}{5})$.

## **Opgave 4** (15 points)

Betragt området $D_1$ i $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$0 \leq z \leq a - \sqrt{x^2+y^2}\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0,$$

hvor $a$ er en positiv konstant.

a) Skitsér området $D_1$ og beskriv det i cylinderkoordinater.
b) Lad $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$. Udregn trippelintegralet

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dV.$$

c) Betragt nu området $D_2$ i $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$0 \leq z \leq a - \sqrt{x^2+y^2}\,,\; |x| \leq y.$$

Gør rede for at

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)dV = \iiint_{D_2} f(x,y,z)dV.$$

Opgavesættet fortsættes på side 3

## **Opgave 5** (20 points)

Betragt den homogene differentialligning

$$(\mathcal{L}) \qquad y''' - y'' + y' - y = 0.$$

a) Find den fuldstændige løsning af reelle funktioner til $(\mathcal{L})$.

b) Lad $f$ være løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = x \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1\,,\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Bestem $f^{(3)}(0)$.

c) Bestem et funktionsudtryk for $f$.