Matematik 1 afslut

REEKSAMINATION 1. AUGUST 1997

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, inklusive lommeregnere, kan medbringes og må benyttes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (25 points)

a) Vis, at differentialformen

$$(3xy^2 - 6y)\,dx + (2x^2y - 3x)\,dy, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ikke er eksakt.

Betragt den tilhørende 1. ordens differentialligning på differentialform:

$$(\mathcal{D}) \qquad (3xy^2 - 6y)\,dx + (2x^2y - 3x)\,dy = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Det oplyses, at $(\mathcal{D})$ har en integrerende faktor μ, som ikke afhænger af y.

b) Vis, at

$$x\mu'(x) - \mu(x) = 0.$$

c) Bestem et udtryk for μ.

d) Bestem samtlige løsningskurver til $(\mathcal{D})$. Løsningerne ønskes angivet på formen

$$\varphi(x, y) = c.$$

Opgave 2 (10 points)

En funktion er givet ved

$$f(x, y) = \exp(x^2 + y^3) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Gør rede for, at $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b) Vis at f har netop ét kritisk punkt og bestem arten.

c) Bestem Taylorpolynomiet for f af grad højst 2 med udviklingspunkt i det kritiske punkt.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (15 points)

Betragt kurven γ i 1. kvadrant med ligningen $x^2 - y^2 = 1$, med begyndelsespunkt $(1,0)$ og slutpunkt $(\sqrt{2}, 1)$.

a) Angiv en parameterfremstilling for γ.

Betragt to vektorfelter i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{og} \quad \mathbf{G}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

b) Gør rede for, at **F** er konservativt, og at **G** ikke er konservativt.

c) Udregn de tangentielle kurveintegraler

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{og} \quad \int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

Opgave 4 (30 points)

Lad S være den symmetriske matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Vis at 0 er en egenværdi for S med egenrum

$$E_0(S) = \text{span}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}.$$

2) Vis, at 3 er en egenværdi for S med egenrum

$$E_3(S) = \text{span}\{(1,1,1)\}.$$

3) Find en invertibel matrix P så

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Det forlanges ikke, at P er ortogonal.)

4) Find det karakteristiske polynomium for S.

5) Find billedet $\operatorname{im} S$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5 (20 points)

Lad $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ være en basis for et underrum S af et indre produktrum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Sæt

$$R_B(\mathbf{v}) = (\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}\rangle, \dots, \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}\rangle)$$

for $\mathbf{v} \in V$.

1) Redegør kort for, at $R_B : V \to \mathbb{R}^m$ er en lineær afbildning.
2) Vis, at
$$R_B \circ P_S = R_B$$
hvor P_S er ortogonalprojektionen på S.
3) Vis, at $R_B(V) = R_B(S)$.
4) Vis, at $S \cap \ker R_B = \{\mathbf{0}\}$.
5) Vis, at R_B er surjektiv (dvs., at $R_B(V) = R_B(S) = \mathbb{R}^m$).

Sæt nu $S^\perp = \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \ \text{ for alle } \ \mathbf{v} \in S\}$

6) Vis, at $S^\perp = \ker R_B$, og redegør kort for, at $S^\perp$ er et underrum.
7) Vis, at
$$\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim V,$$
når V er endelig dimensionalt.