Matematik 1 midtvejsprøve

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes.
Sættet består af 6 opgaver og er på 3 sider.

Opgave 1 (20 points)

Lad A være (3×4)-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Angiv en kæde af rækkeoperationer, der fører A over i den reducerede echelon-matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Find rangen af A.

c) Løs det homogene ligningssystem

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

d) For hvilke vektorer $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ har det inhomogene ligningssystem

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

en løsning?

Opgave 2 (20 points)

Lad M være delmængden

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2,3) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

af vektorrummet $\mathbb{M}(2,3)$ af (2×3) matricer.

a) Er M et underrum af $\mathbb{M}(2,3)$?

b) Tilhører vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

underrummet span M?

c) Find en basis for underrummet span M.

Opgave 3 (10 points)

Find alle hele tal x, som opfylder de to ligninger

$$x \equiv 2 \bmod 6 \;\text{ og }\; x \equiv 3 \bmod 7\,.$$

Opgave 4 (10 points)

Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

a. Vis at f er sumfunktion for en potensrække med konvergensradius $+\infty$.

b. Gør rede for at $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, altså at f er vilkårligt ofte differentiabel på hele $\mathbb{R}$.

c. Beregn $f^{(2)}(0)$.

Opgave 5 (20 points)

Betragt den plane kurve, som i polære koordinater er givet ved ligningen

$$\mathcal{C}_a : r = a^{-\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

hvor $a > 0$ er et fast reelt tal.

a. Skitser kurven for $a = 1$ og for $a = 2$.

Lad $l(a)$ betegne længden af $\mathcal{C}_a$.

b. Udregn $l(e)$, hvor e er grundtallet for den naturlige logaritme.

c. Find et udtryk for $l(a)$ for et vilkårligt $a > 0$.

d. Beregn $\lim_{a \to \infty} l(a)$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (20 points)

Betragt funktionen $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}\,, \quad (x \in \mathbb{R})\,.$

a. Vis, at f er voksende.

b. Vis, at $f(\sinh t) = -e^{-t}\,, \quad (t \in \mathbb{R})$.

c. Bestem værdimængden for f, idet du redegør omhyggeligt for dit resultat.

d. Vis, at for ethvert $x > 0$ findes der $0 < \theta < 1$ så

$$f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^2+\theta}}\,.$$

(Vink: Benyt middelværdisætningen på funktionen $g(t) = \sqrt{x^2+t}\,$.)