Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1997

Matematik 1 afslut

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan benyttes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (25points)

Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning givet ved $T = \mu_A$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

1) Find rangen af T.
2) Vis, at 0 er en egenværdi for T og find det tilhørende egenrum $E_T(0)$.
3) Find $T(1,1,1)$.
4) Vis, at $B = \{(5,-1,-1),(1,1,1),(1,0,1)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.
5) Find matricen for T med hensyn til den ordnede basis B.
6) Vis, at A er diagonaliserbar.

Opgave 2 (25 points)

Lad A være (3×2)-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

og lad, som sædvanlig, A^t betegne den transponerede (2×3)-matrix.

1) Udregn matrixproduktet $S = A^t A$.
2) Vis, at S er invertibel.

Idet vi nu sætter $P = AS^{-1}A^t$, skal du redegøre for

3) S er symmetrisk.
4) $S^{-1}\mathbf{u} \cdot S\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
5) $P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.
6) $(\mathbf{x} - P\mathbf{x}) \perp A\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points)

Betragt funktionen

$$g(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - \ln(x^2) \quad x>0,\ y>0\,.$$

a) Beregn gradienten $\nabla g(x,y)$.

b) Beregn den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}g(x,y)$ hvor $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

c) Lad T betegne det ligesidede trapez med hjørner $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,2)$ og $(2,1)$. Gør rede for, at g antager såvel en største værdi S og en mindste værdi M på T.

d) Bestem S og M. Bemærk, at to af T's sider er parallelle med $\mathbf{u}$.

Opgave 4 (15 points)

Betragt den homogene differentialligning

$$(\mathcal{L}) \qquad\qquad y^{(4)} - y = 0\,.$$

a) Find den fuldstændige løsning af reelle funktioner til $(\mathcal{L})$. Det oplyses, at $z^4-1 = (z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$.

b) Lad f være løsningen til begyndelsesværdiproblemet:

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = x \\ \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0\,. \end{cases}$$

Bestem et funktionsudtryk for f.

c) Vis med f som i b), at $f^{(4k)}(0) = 0$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 5 (15 points)

Lad $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ og lad $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
Lad $\mathcal{C}$ være kurven bestående af det rette liniestykke $\mathcal{C}_1$ fra $(0,0)$ til $(r,0)$ efterfulgt af cirkelbuen $\mathcal{C}_2$ med centrum i $(0,0)$ fra $(r,0)$ til (x,y) i positiv omløbsretning.

a) Tegn en skitse af $\mathcal{C}$ for (x,y) beliggende i 1. kvadrant.

Lad $\mathbf{F}$ betegne vektorfeltet

$$\mathbf{F}(u,v) = \frac{u}{1+u^2+v^2}\mathbf{i} + \frac{v}{1+u^2+v^2}\mathbf{j} \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2\,.$$

b) Beregn det tangentielle kurveintegral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, hvor C er en kurven defineret ovenfor.

Opgave 5 fortsættes på side 3

Resultatet af integrationen i b) kaldes $\phi(x,y)$.

c) Vis, at hermed har vi defineret et potential, ϕ, for $\mathbf{F}$.

d) Udregn

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{u}{1+u^2+v^2}\,du + \frac{v}{1+u^2+v^2}\,dv$$

hvor $\mathcal{D}$ er kurven $t \mapsto (t,t^2)$, $0 \le t \le 1$.