Matematik 1 midtvejseksamen

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes. Sættet består af 8 opgaver og er på 3 sider.

Opgave 1 (10 points)

Lad $(G, \cdot)$ være en gruppe og $g \in G$ et element i G. Gør rede for, at

$$C(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$$

er en undergruppe i G.

Opgave 2 (10 points)

Lad $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ være vektorer i det 3-dimensionale euklidiske vektorrum $\mathbb{R}^3$.

a) Vis, at $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}\} \subseteq \operatorname{span}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\} \cap \operatorname{span}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\}$.

b) Gælder det altid, at

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\} \cap \operatorname{span}\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\},$$

hvis $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ er lineært uafhængige og $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$?

Giv et bevis eller et modeksempel.

Opgave 3 (20 points)

Lad A være (2×2)-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Find A^2.

b) Vis ved induktion, at

$$(*) \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for alle naturlige tal $n \in \mathbb{N}$.

c) Find A^{-1}.

d) Undersøg om formlen $(*)$ i b) gælder for alle hele tal $n \in \mathbb{Z}$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (10 points)

a) Vis, at der gælder
$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$
for alle kvadratiske $(n \times n)$-matricer A og B.

b) Find to (2×2)-matricer A og B, så
$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2 .$$

Opgave 5 (15 points)

(1) Vis, at rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$$
er konvergent.

(2) Vis, at rækken
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$$
er divergent.

(3) Er rækken
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$$
konvergent ? Begrund dit svar.

Opgave 6 (10 points)

Det oplyses, at ligningen
$$\cos(x+y) + \sin y = 1$$
bestemmer y som en funktion $y = f(x)$ i et interval omkring $x = 0$ med $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Bestem 2. Taylorpolynomium for f med udviklingspunktet $x = 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 7 (15 points)

Lad $f \in C^1([0,1])$.

(1) Gør rede for at forskriften
$$g(x) = f(x^2)$$
definerer en funktion $g \in C^1([-1,1])$.

(2) Beregn $g'(0)$.

(3) Vis, at g er to gange differentiabel i $x = 0$ med $g''(0) = 2f'(0)$.

Opgave 8 (10 points)

Et område i planen er givet ved $x^2 \leq 1 - y$ og $y \geq 0$.

(1) Skitsér området.

(2) Udregn voluminet af det omdrejningslegeme som fås ved rotation af området omkring y-aksen.