Matematik 1 afslut

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (15 points)

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede og sæt

$$R(x,y) = (y,x) \text{ for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Brug kædereglen (eller andet) til at vise, at

a)
$$D_1(f \circ R)(x,y) = D_2 f(y,x) \text{ for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

b) Vis, at f er symmetrisk, dvs. at
$$f(x,y) = f(y,x) \text{ for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$
hvis og kun hvis $f \circ R = f$.

c) Vis, at
$$D_1 f(x,y) = D_2 f(y,x)$$
når f er symmetrisk.

Opgave 2 (10 points)

Lad
$$R = \{(x,y) \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x^2 \le 1 - y^3\} .$$

(1) Angiv eksplicitte udtryk for begge iterationer af dobbeltintegralet
$$\iint_R xy\, dA .$$

(2) Beregn dernæst værdien af $\iint_R xy\, dA$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (25 points)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) e^{-(x+y)} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

1) Lad $k \geq 0$. Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x,kx)$.
2) Gør rede for, at f antager en størsteværdi, S, og en mindsteværdi, M, på 1. kvadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$.
3) Vis, at $S = -M$. Du kan evt. først vise at $f(x,y) = -f(y,x)$.
4) Bestem f's kritiske punkter og undersøg arten.
5) Vis, at

$$\sup\left\{\frac{f(x,y)}{x-y} \mid x>0\,,\, y>0\,,\, x\neq y\right\} = e^{-1}$$

og

$$\inf\left\{\frac{f(x,y)}{x-y} \mid x>0\,,\, y>0\,,\, x\neq y\right\} = 0\,.$$

Opgave 4 (30 points)

Betragt vektorrummet $\mathbb{P}_2$ af polynomier af grad mindre end eller lig 2 og udstyr det med et indre produkt defineret ved

$$\langle p,q\rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

hvor $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ og $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$,. Lad S betegne underrummet af $\mathbb{P}_2$ udspændt af $p_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$ og $p_2(x) = 4x^2 + x + 1$.

a) Bestem en ortonormal basis for S.
b) Lad som sædvanligt $\text{proj}_S(\boldsymbol{v})$ betegne projektionen af $\boldsymbol{v}$ på underrummet S. Vis at afbildningen $\text{proj}_S : \boldsymbol{v} \curvearrowright \text{proj}_S(\boldsymbol{v})$ er lineær.
c) Bestem $\text{proj}_S(p_3)$ hvor $p_3(x) = -x^2 + 2x + 2$.
d) Udvid den i spørgsmål a) fundne ortonormale basis for S til en ortonormal basis for $\mathbb{P}_2$.
e) Find matricen for proj_S i den i spørgsmål d) fundne ortonormale basis.
f) Find matricen A for proj_S i standardbasen $\{1,x,x^2\}$.
g) Lad B betegne matricen i standardbasen for projektionen proj_{p_3} ind på p_3 hvor p_3 er vektoren defineret i spørgsmål c).

Opgave 4 fortsættes på side 3

Bestem (uden udregning)

$$A \cdot B \;\text{ og }\; B \cdot A$$

hvor A er matricen defineret i spørgsmål f).

h) Bestem nulliteten for de to afbildninger proj_S og proj_{p_3} og angiv ortonormalbaser for $\ker(\mathrm{proj}_S)$ og $\ker(\mathrm{proj}_{p_3})$.

Opgave 5 (20 points)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Vis, at $A^3 = 0$.

b) Vis, at $\det A = 0$ og at $\det B = 0$ for enhver matrix $B \in \mathbb{M}(n,n)$, for hvilken $B^3 = 0$.

c) Lad $C \in \mathbb{M}(n,n)$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ samt $x \in \mathbb{R}^n$ være givet. Gør rede for at hvis $Cx = \lambda x$, så er $C^2 x = \lambda^2 x$.

d) For vilkårlig $B \in \mathbb{M}(n,n)$ skal det vises at hvis λ er en egenværdi for B, så er λ^3 en egenværdi for B^3.

e) Find alle egenværdier for A.

f) Er A diagonaliserbar? Begrund dit svar.