Københavns Universitet
Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 1 midtvejsprøve

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Sættet består af 6 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (10 points)

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion, hvis Taylorpolynomium af grad 4 omkring 0 er $P_4(x) = 3x^3 + 4x^4$.

a) Angiv $f(0)$, $f'(0), \cdots, f^{(4)}(0)$.

b) Bestem grænseværdien $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Opgave 2 (10 points)

Bestem overfladearealet af fladen som fremkommer ved rotation omkring x-aksen af kurven med ligning $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Opgave 3 (30 points)

Lad $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad (x > 0)$.

(a) Vis, at $f(x)$ er aftagende for $x \ge 2$.

(b) Beregn $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

(c) Gør rede for, at rækken $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n^2}$ er konvergent.

Lad summen af rækken i (c) være S

(d) Vis at
$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx \le S \le \int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx + \frac{\ln 2}{4}\,.$$

(e) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n}$ er divergent.

Opgave 4 (15 points)

Lad $p > 2$ være et primtal og lad $a, b, c \in \mathbb{Z}$ opfylde, at $1 \le a < p$, $1 \le b < p$ og c er vilkårlig.

1) Gør rede for at produktet ab ikke er deleligt med p.

 Opgave 4 fortsættes på side 2

Betegn restklassen af et tal $c \in \mathbb{Z}$ modulo p med $[c]$.

2) Vis at ligningen $[a][x] = [c]$ højst har én løsning.
3) Find alle x for hvilke $5x \equiv 3 \pmod{11}$.

Opgave 5 (10 points)

Benyt induktionsprincippet til at vise, at for vilkårligt $\varepsilon > 0$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon\,.$$

Opgave 6 (25 points)

Lad $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ betegne standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Betragt matricen S med søjlerne $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\}$.

1) Udregn S^2.
2) Gør rede for at S er invertibel og find den inverse matrix S^{-1}.
3) Lad $n \in \mathbb{N}$ og $A \in \mathbb{M}(4, n)$ være vilkårlige. Beskriv SA ud fra A.
4) Vis at $B \in \mathbb{M}(4, 4)$ er invertibel hvis og kun hvis SB er invertibel. Angiv en ligning der udtrykker sammenhængen mellem disse inverse.