Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 1 afslut

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (25 points)

Betragt følgende tre vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \;\; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestem vinklen mellem $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ og afgør om vinklen mellem $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_3$ er større eller mindre end $60°$.

b) Find den bedste approximation $\mathbf{w}$ til $\mathbf{u}_3$ (d.v.s. den vektor $\mathbf{w} \in S_1$ i underrummet S_1 udspændt af $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ som minimerer $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}'\|$ hvor $\mathbf{w}' \in S_1$.

c) Bestem en orthonormal basis for underrummet $S_2 = \text{span}\{\mathbf{u}_1\,,\ \mathbf{u}_2\,,\ \mathbf{u}_3\}$.

d) Bevis at $\mathbf{u}_1\,,\ \mathbf{u}_2\,,\ \mathbf{u}_3$ er lineært uafhængige.

e) Lad T betegne den lineære afbildning $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ der har matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Bemærk at rækkerne i A er dannet ud fra vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$' koordinater) m.h.t. standardbaserne i $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.

Bestem dimensionen af ker T.

Opgave 2 (25 points)

Betragt rummet $\mathbb{P}_2$ bestående af polynomier af højst anden grad.
Lad T være den lineære afbildning der er fastlagt ved at

$$T(1) = x^2$$
$$T(x) = 1 + x + x^2$$
$$T(x^2) = 1\,.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

a) Gør rede for at $1+x^2$ er en egenvektor for T. Angiv den egenværdi som $1+x^2$ hører til.

Betragt basen $B := \{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{P}_2$.

b) Angiv matricen for T m.h.t. B.

c) Find de øvrige egenværdier for T.

d) Find alle egenrum $E_T(\lambda) \subseteq \mathbb{P}_2$.

e) Gør rede for om T er diagonaliserbar.

Opgave 3 (15 points)

a) Vis, at løsningen til ligningen

$$\text{(I)} \qquad yz^3 + 2x^3 + xy^3 = 3$$

nær punktet $(1,1,1)$ er graf for en funktion $z = z(x,y)$ defineret nær $(1,1)$.

b) Find gradienten $\nabla z(1,1)$ af funktionen $z(x,y)$.

c) Angiv en ligning for tangentplanen i $(1,1,1)$ til fladen givet ved ligningen (I).

Opgave 4 (10 points)

Betragt dobbeltintegralet

$$m = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\, dy\,,$$

hvor f er en kontinuert funktion på integrationsområdet.

a) Angiv integrationsområdet, og opskriv det dobbeltintegral som fremkommer ved ombytning af integrationsordenen.

b) Beregn m når $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Opgave 5 (25 points)

Betragt den homogene differentialligning

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})\,. \tag{$*$}$$

Opgave 5 fortsættes på side 3

a) Vis, at $y = \dfrac{\sin x}{x}$ er en løsning til $(*)$ for $x \neq 0$, og angiv den potensrække hvis sumfunktion f_1 stemmer overens med $\dfrac{\sin x}{x}$ for $x \neq 0$.

b) Vis at hvis en løsning til $(*)$ er givet ved potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, så gælder

$$a_n + (n+3)(n+2)a_{n+2} = 0 \qquad (\kappa)$$

for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

c) Vis at konvergensradius for en potensrække som opfylder ligningerne (κ) for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ er $R = +\infty$.

d) Bestem et polynomium af højst første grad som er løsning til den inhomogene ligning

$$xy'' + 2y' + xy = x^2 + x + 2\,. \qquad (**)$$

e) Find dernæst den løsning f til den inhomogene ligning $(**)$ som opfylder $f(0) = 2$ og $f'(0) = 1$.