Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 1 afslut

REEKSAMINATION 1. AUGUST 1996

Opgaver til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, inklusive lommeregnere, kan medbringes.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (15 points)

Lad $f(x) = \tan^4 x - 1\,,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. og betragt forskriften af 2 variable givet ved

$$H(u,v) = \int_u^v f(x)\,dx\,.$$

a) Angiv det maksimale definitionsområde for H.
b) Gør rede for at H er differentiabel og bestem ∇H.
c) Bestem H's kritiske punkter og angiv arten.

Opgave 2 (10 points)

Betragt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = (y - 3x^2)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

a) Vis, at $\mathbf{F}$ er konservativt og bestem samtlige potentialfelter for $\mathbf{F}$.
b) Udregn værdien af det tangentielle kurveintegral

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}\,.$$

Her er $\mathcal{K}$ kurven med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \alpha t^3\mathbf{i} + \beta t^2\mathbf{j}$, $t \in [0,1]$ hvor α og β er givne reelle tal.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (25 points)

a) Vis, at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^n$$

har konvergensradius $R = +\infty$.

Lad f betegne sumfunktionen.

b) Gør rede for, at f opfylder

$$f(x^2) = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

c) Find $f^{(5)}(0)$.

d) Find $\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{3}x-f(x)}{x}$.

e) Vis at, hvis en analytisk funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opgylder

$$g(x^2) = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

så er $g = f$.

f) Gælder konklusionen i (e), hvis kravet om at g er analytisk droppes?

Opgave 4 (20 points)

Betragt en reel 4×4 matrix

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}. \tag{$*$}$$

1° Gør rede for at $\det A = a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}$.

2° Antag yderligere at A er symmetrisk og gør rede for at $\det A \geq 0$.
Som bekendt er en matrix ortogonal hvis dens søjler udgør et ortonomalsystem.

3° Lad A være som i $(*)$ og antag A er ortogonal.
Angiv samtlige muligheder for A.

4° Lad $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vis at B kan diagonaliseres. Find egenværdier og egenrum.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5 (30 points)

Betragt $C[-1,1]$ udstyret med det sædvanlige indre produkt og lad S være det underrum der er udspændt af funktionerne 1, x og x^2.

1) Angiv en ortonormal basis g_0, g_1, g_2 for S.
2) Lad $f \in C[-1,1]$ og antag, at

$$f_1 = a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2$$

er den vektor i S der bedst approksimerer f (d.v.s. den vektor f_1 i S der minimerer $\|f - \varphi\|$ for $\varphi \in S$). Bevis at

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 \le \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \,.$$

3) Antag nu at funktionen i spørgsmål 2 er $f(x) = x^3$. Beregn den tilhørende bedste approksimation f_1.
4) Definer en operator T ved

$$T(\varphi) = \psi$$

hvor

$$\psi(s) = \int_{-1}^{1} (s+t)\varphi(t) \, dt \,.$$

Denne operator afbilder $C[-1,1]$ ind i sig selv. (Dette må du benytte uden bevis.) Vis, at T er lineær og vis at den afbilder S ind i sig selv.
5) Lad T_1 betegne T's restriktion til S. Bestem T_1's matrix m.h.t. basen $1, x, x^2$.
6) Bevis at S har en ortonormal basis af egenvektorer for T_1.