Matematik 1 midtvejseksamen

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes. Sættet består af 5 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (20 points)

Lad $u(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, være en parametriseret plan kurve som begynder og slutter i $(0,0) = u(a) = u(b)$. Vi antager, at koordinatfunktionerne, $x(t)$ og $y(t)$, er differentiable med kontinuerte afledede, og at $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ for alle $t \in [a,b]$.
Som bekendt er afstanden, $|u(t)|$, mellem $u(t)$ og $(0,0)$ givet ved $|u(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.

a) Redegør for at $|u(t)|$, $a \le t \le b$, er en kontinuert funktion.

b) Redegør for, at der findes et $t_0 \in [a,b]$ så $|u(t_0)| \ge |u(t)|$ for alle $t \in [a,b]$.

c) Vis, at $u(t_0) \neq (0,0)$ og slut heraf at $a < t_0 < b$.

d) Vis, at $x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0$.
Vink: Funktionen $|u(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ har maksimum i $t = t_0$.

Opgave 2 (30 points)

a) Vis, at matricen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er invertibel og find den inverse.

b) Find samtlige højreinverse matricer til
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} .$$

Lad nu $A \in \mathbb{M}(m,n)$.

c) Gennemfør et bevis for at $I_m A = A$.

d) Vis, at hvis $C_1, C_2 \in \mathbb{M}(n,m)$ er højreinverse matricer til A og hvis $\alpha \in \mathbb{R}$, så er $\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2$ også en højreinvers til A.

Lad yderligere $B \in \mathbb{M}(n,p)$ være givet.

e) Vis, at hvis C er en højreinvers til A og hvis D er en højreinvers til B, så er DC veldefineret og en højreinvers til AB.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (10 points)

Vis, at $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ for $n=1,2,\cdots$.

Opgave 4 (10 points)

a) Find mængden af løsninger $x\in\mathbb{Z}$ til ligningen $3072x\equiv 3 \pmod{51}$.

b) Vis, at ligningen $3072x\equiv 4 \pmod{51}$ ikke har nogen løsninger $x\in\mathbb{Z}$.

Opgave 5 (30 points)

a) Vis, at $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$.

b) Vis, at

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

og

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\geq\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,,\qquad \text{for } x>0\,,$$

f.eks. ved at benytte middelværdisætningen.

c) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ er divergent, f.eks. ved at sammenligne den med en kendt divergent række. Du kan eventuelt benytte resultaterne fra b).

d) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ er konvergent.

e) For hvilke $\alpha\in\mathbb{R}$ er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$$

konvergent ?