Mat 1

Test dig selv

Opgave 1 (35 points)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -\; x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1. \end{array} \qquad (*)$$

a. Opstil den udvidede koefficientmatrix A for dette system.

b. Vis, skridt for skridt, at A kan rækkereduceres til

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[b_{ij}\right].$$

c. Afgør om løsningsmængden S til $(*)$ er tom eller ej. Begrund!

d. Erstat b_{34} med værdien 0 og angiv løsningsmængden T til det ligningssystem, hvortil denne matrix er udvidet koefficient matrix.

e. Angiv en ændring af b_{33} som afstedkommer ændret svar på 3.

f. Gør rede for at T er et underrum af $\mathbb{R}^3$.

Opgave 2 (15 points)

(a) Find tal $a, b \in \mathbb{Z}$ så $16a + 35b = 1$.

(b) Idet $[n]$ for $n \in \mathbb{Z}$ betegner n's restklasse modulo 35, skal man vise, at der er et og kun et tal $a \in \{1, 2, \cdots, 34\}$ så $[16][a] = [1]$. Find dette tal a.

Opgave 3 (25 points)

Lad en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{x}\right) & x \geq 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & x < 0 \end{cases}.$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

(a) Godtgør, at f er kontinuert på hele $\mathbb{R}$.

(b) Benyt l'Høopital's regel til at vise at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

(c) Godtgør herved, at f er differentiabel på hele $\mathbb{R}$ og angiv $f'(x)$.

(d) Er f' kontinuert? Begrund dit svar.

Opgave 4 (10 points)

Kurven $x^2 - y^2 = y^3$ går gennem $(0,-1)$ og bestemmer dér y som en funktion af x.

a) Find Taylorpolynomiet af 2. grad med udviklingspunkt 0 for y.

b) Vis, at y har lokalt minimum i 0.

Opgave 5 (5 points)

Find reelle tal a og b så

$$(a+ib)^6 = 8$$

og $b \neq 0$.

Opgave 6 (10 points)

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes som bekendt *lige* dersom $f(x) = f(-x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og *ulige* dersom $f(x) = -f(-x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Antag at f er differentiabel. Vis

$$f \text{ er lige } \Rightarrow f' \text{ er ulige.}$$