

## Hovedfag: Matematik

Opgave til besvarelse i fire timer for  
stud.scient. *Carl Peter Thomsen*

### 1. STILOPGAVE (50%) *Dimensionsteori*

Giv de vigtigste egenskaber ved funktoren  $\text{Ext}$ .

Giv definitionen af projektiv dimension og injektiv dimension.

Formulér sætninger, der karakteriserer disse dimensioner ved funktoren  $\text{Ext}$ , og bevis nogle af disse.

Giv definitionen af global dimension.

Formulér og bevis Auslanders sætninger om global dimension.

### 2. PROBLEMOPGAVE (50%)

Lad  $R$  være en regulær lokal ring, som ikke er et legeme, og som har maksimalideal  $\mathfrak{m}$  og restklasselegeme  $k = R/\mathfrak{m}$ . Sæt  $n = \text{gldim } R$  (der som bekendt er lig med  $\text{dim } R$ , Krull dimensionen af  $R$ ). Lad endvidere  $M$  være en endelig frembragt  $R$ -modul forskellig fra nul-modulen.

(a) Bevis, at der gælder:  $\text{pd}_R M + \text{depth}_R M = n$ .

Her kan henvises til en generel sætning vedrørende relationer mellem projektive dimensioner og dybder; denne sætning ønskes formuleret, men ikke bevist.

(b) Bevis, at følgende er ensbetydende:

(i)  $\text{pd}_R M = n$ ;

(ii)  $\text{Hom}_R(k, M) \neq 0$ ;

(iii) der findes  $x \in M$  forskellig fra nul-elementet, så  $\mathfrak{m}x = 0$ .

Begrund, at der gælder:  $\text{pd}_R M < n \Rightarrow \mathfrak{m}M \neq 0$ .

(c) Bevis, at der gælder:  $\text{pd}_R M < n \Rightarrow \text{pd}_R(\mathfrak{m}M) = n - 1$ .

Man kan med fordel betragte en passende kort-exakt følge. Hvis der i beviset benyttes en hjælpesætning vedrørende relationer mellem projektive dimensioner af moduler i en kort-exakt følge, da ønskes denne hjælpesætning bevist.

(d) Bevis, at mængden  $\{0, 1, \dots, n\}$  er lig med mængden:

$$\{\text{pd}_R N \mid N \neq 0 \text{ er en endelig frembragt } R\text{-modul}\}.$$

God fornøjelse

Hans-Bjørn Foxby