Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, 2. del, vinteren 1991-92

Hovedfag: Matematik

Opgave til besvarelse i 4 timer for

stud.scient. **Rubina Chandry**

OPGAVE I OPTIMAL KONTROLTEORI OG VARIATIONSREGNING

Man betragter følgende optimeringsproblem:

Maksimer integralet

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt$$

over mængden af kontinuerte, stykkevis C^1 vektorfunktioner $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ og stykkevis kontinuerte skalære funktioner $u(t)$ på $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1$), hvor $x(t)$ og $u(t)$ opfylder:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u(t), t), \text{ for } j = 1, \ldots, n;\\
&x(t_0) = x^0;\\
&x_j(t_1) \begin{cases} = x_j^1, & \text{for } j = 1, \ldots, l,\\ \geq x_j^1, & \text{for } j = l+1, \ldots, m,\\ \text{fri}, & \text{for } j = m+1, \ldots, n;\end{cases}\\
&u(t) \in U, \text{ for } t \in [t_0, t_1].
\end{aligned}$$

Her er $f_0(x,u,t), f_1(x,u,t), \ldots, f_n(x,u,t)$ et givet system af C^∞ funktioner af $(x,u,t) \in \mathbf{R}^n \times U \times [t_0, t_1]$, U er et interval af $\mathbf{R}$, og $1 \leq l \leq m \leq n$ er hele tal; endvidere er der givet en vektor $x^0 \in \mathbf{R}^n$ og en vektor $x^1 \in \mathbf{R}^m$. (Alle tal er reelle.)

1° Formuler Pontryagin's maksimumsprincip for problemet.

2° Formuler Mangasarian's og Arrow's tilstrækkelighedssætninger for problemet.

3° Formuler en sætning om eksistens af løsninger til problemet.

4° Hvad er en "bang-bang" løsning?

5° Hvordan ændres Pontryagin's sætning, når betingelsen $x(t_0) = x^0$ erstattes med en betingelse på formen

$$\begin{aligned}
&R_i(x(t_0)) = 0, \text{ for } i = 1, \ldots, r',\\
&R_i(x(t_0)) \geq 0, \text{ for } i = r'+1, \ldots, r;
\end{aligned}$$

hvor R_i'erne er funktioner på $\mathbf{R}^n$ (med gradient $\neq 0$ dèr hvor $R_i(x) = 0$) ?

Opgavesættet fortsættes på side 2

6° Illustrer punkt 1°–4° ved diskussion af problemet, hvor

$$\begin{gathered} n = 1, \quad l = m = 0, \\ f_0(x,u,t) = (1-u)x, \quad f_1(x,u,t) = u, \\ U = [0,1], \quad t_0 = 0, \quad t_1 = T > 0, \quad 0 < x^0 < T. \end{gathered}$$

7° Illustrer punkt 1°–4° ved diskussion af problemet, hvor

$$\begin{gathered} n = 1, \quad l = m = 0, \\ f_0(x,u,t) = -\tfrac{1}{2}(x^2 + u^2), \quad f_1(x,u,t) = u + t, \\ U = \mathbf{R}, \quad t_0 = -a < 0, \quad t_1 = 0, \quad x^0 \in \mathbf{R}. \end{gathered}$$

Problemerne i 6° og 7° løses i videst muligt omfang, og man kan eventuelt uddybe dem med korte forslag til økonomiske anvendelser.

Opgaveteksten behøver ikke gentages i besvarelsen. Ingen hjælpemidler.