Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, 2. del, vinteren 1990–91

Hovedfag: Matematik

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 3 dage.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer, hvorimod alle gængse hjælpemidler (faglitteratur, personlige notater, lommeregnere m.v.) er tilladt.

Opgavesættet udleveres tirsdag den 8. januar 1991 fra kl. 9 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest fredag den 11. januar 1991 kl. 9.

Denne første side i opgavesættet skal udgøre første side af besvarelsen. Den skal ved aflevering underskrives og dateres af eksaminanden.

Eksaminand:

CPR-nr.:

Antal ark i besvarelsen:

Undertegnede erklærer herved at have besvaret vedlagte eksamensæt selvstændigt uden hjælp fra andre personer.

__________ _____________

dato (underskrift)

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave til besvarelse i 3 dage for

stud.scient. **Arne Ledet**

Opgave 1

I det følgende betegner $\mathbf{C}$ de komplekse tals legeme, $\mathbf{R}$ de reelle tals legeme og $\overline{\mathbf{Q}}$ legemet af alle algebraiske tal.

1) Vis, at der findes 2^{α_0} forskellige dellegemer af $\overline{\mathbf{Q}}$ der har codimension 2 i $\overline{\mathbf{Q}}$. (Skriv $\overline{\mathbf{Q}}$ som voksende tællelig foreningsmængde af endelige normale udvidelser af $\mathbf{Q}$ og udled heraf, at $\overline{\mathbf{Q}}$ har 2^{α_0} automorfier.)

   Hvor mange isomorfiklasser findes blandt disse legemer? Bestem fællesmængden af disse legemer.

2) Vis, at der findes $2^{2^{\alpha_0}}$ indbyrdes ikke-isomorfe arkimedisk ordnede dellegemer af $\mathbf{C}$, der har codimension 2 i $\mathbf{C}$.

   Vis, at der findes $2^{2^{\alpha_0}}$ ikke-isomorfe ikke-arkimedisk ordnede dellegemer af $\mathbf{C}$, der har codimension 2 i $\mathbf{C}$.

   Angiv antallet af med $\mathbf{R}$ isomorfe dellegemer i $\mathbf{C}$, der har codimension 2 i $\mathbf{C}$.

3) Lad L være et reelt afsluttet legeme med ikke-triviel automorfigruppe $\mathbf{G}$.

   Vis, at $\mathbf{G}$ ikke har nogen endelig undergruppe $\neq 1$. (Benyt Artin-Schreier's sætning.)

4*) Lad K være et arkimedisk ordnet reelt afsluttet legeme.

   Vis, at funktionslegemet $K(T)$ har ikke-arkimediske ordninger, så $K(T)$ har ikke-trivielle ordenstro automorfier.

   Vis, at der findes $2^{2^{\alpha_0}}$ dellegemer af $\mathbf{C}$, der har codimension 2 i $\mathbf{C}$ og har uendelig automorfigruppe.

5) Giv et eksempel på et formelt reelt legeme L med følgende egenskaber:

   i) L har netop een ordning.

   ii) L er ikke tæt i det reelle hylster svarende til ordningen i i).

6*) Vis, at der findes dellegemer K af $\mathbf{C}$, så dimensionen af $\mathbf{C}$ som vektorrum over K er α_0. (Anvend f.eks. Puiseux's sætning.)

   Bestem antallet (kardinaltallet) af sådanne dellegemer.

Opgave 2

Alle legemer i denne opgave antages at have karakteristik 0. For et legeme K er Pytha-

Opgave 2 fortsættes på side 3

gorastallet med $d(K)$. Legemet K kaldes Pythagoræisk hvis $d(K) = 1$.

1) Vis, at legemet K er Pythagoræisk, hvis K er formelt reelt og har netop 2 kvadratklasser, d.v.s. hvis $[K^* : (K^*)^2] = 2$.

2) Vis, at for et legeme K er følgende betingelser ækvivalente:

   i) K er Pythagoræisk.

   ii) Hvis a og b repræsenterer forskellige kvadratklasser i K, findes en ordning af K så a og b har modsat fortegn.

3) Lad K være et Pythagoræisk legeme.

   Vis, at K har uendelig mange kvadratklasser hvis og kun hvis K kan ordnes på uendelig mange forskellige måder.

4) Lad K være et formelt reelt Pythagoræisk legeme.

   Vis, at en kvadratisk form over K er universel hvis og kun hvis den er isotrop.

5*) Hvilken forbindelse findes mellem $d(K)$ og $d(K(X))$, hvor $K(((X))$ betegner legemet af formelle potensrækker i en variabel over K?

6*) Lad K være mængden af alle reelle konstruerbare tal (jfr. noterne i Mat 3AL).

   Vis, at $d(K) = 1$.

   Vis, at $d(K(X)) > 2$. (Det kan uden bevis benyttes, at der findes et fjerdegradspolynomium $f(x)$ over $\mathbf{Q}$, der ikke har reelle rødder, således at spaltningslegemet for $f(x)$ over $\mathbf{Q}$ har den alternerende gruppe A_4 som Galoisgruppe.)

De med $*$ betegnede spørgsmål er bonusspørgsmål.