

## Hovedfag: Matematik

Opgave til besvarelse i 4 timer for

stud.scient. **Stig Rindom**

### Opgave 1. Pells ligning

1. Formuler hovedresultatet om heltalsløsninger til ligningen

$$(*) \quad x^2 - Dy^2 = \pm 1,$$

hvor  $D > 1$  er et naturligt tal, som ikke er et kvadrattal. Angiv specielt, hvorledes en fundamentalløsning kan bestemmes ud fra kædebrøken for  $\sqrt{D}$ .

Der ønskes ingen beviser for de anførte sætninger.

2. Find den fuldstændige løsning til (\*) for  $D = 41$ .

### Opgave 2. Kvadratiske tallegemer

I det følgende betegner  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ , hvor  $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$  og er kvadratfrit. Endvidere betegner  $O_K$  ringen af hele elementer i  $K$  og  $d$  diskriminanten af  $K$ , dvs. af  $O_K$ .

1. Angiv en  $\mathbb{Z}$ -basis for  $O_K$ , og bevis rigtigheden heraf. Angiv endvidere formelen for  $d$  udtrykt ved  $D$ .

2. Formuler sætningen om dekomposition af hovedidealet  $pO_K$  som produkt af primidealer. Forklar specielt betydningen af indgående begreber og symboler.

3. Bevis dekompositionssætningen, når  $p$  er et ulige primtal.

4. Lad nu  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ . Bestem dekompositionstypen af  $pO_K$  for hvert primtal  $p$  (altså også  $p = 2, 7$ ).

De optrædende primidealer ønskes ikke eksplicit angivet.