Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, 2. del, sommeren 1988

Hovedfag: Matematik

Opgave til besvarelse i 4 timer for

stud.scient. Anders Jensen

Opgave 1 (tillægges vægt 65%)

Gør rede for begrebet venstre global dimension af en ring.

Begrebet regulær lokal ring ønskes defineret.

Formuler hovedsætningen, som udtrykker sammenhængen mellem regulær lokale ringe og lokale ringe af endelig global dimension.

Endelig ønskes bevist, at en lokal noethersk ring med endelig global dimension er en regulær lokal ring. Hovedtrækkene i beviset bør træde klart frem og detaljer bør kun medtages i det omfang tiden tillader.

Opgave 2 (tillægges vægt 35%)

Lad R betegne et kommutativt noethersk integritetsområde og $T = R/M$ en simpel R-modul. R antages endvidere ikke at være et legeme.

Vis, at M/M^2 både som R- og R/M-modul er isomorf med endelig mange kopier af T.

Vis, at $\mathrm{Ext}^1_R(T,T) \neq 0$. (Betragt f.eks. den kort eksakte følge $0 \to M \to R \to T \to 0$ og modulen M/M^2. Det kan uden bevis benyttes, at $M \neq M^2$).

Lad S være endnu en simpel R-modul og antag, at $\mathrm{Ext}^1_R(T,S) \neq 0$ og at $S = R/N$.

Gør rede for, at der findes en kort eksakt følge

$$(*) \qquad 0 \to S \to X \to T \to 0$$

som ikke er split eksakt.

Vis, at modulen X opfylder følgende:

i) $\mathrm{long}(X) = 2$ (long( ) betegner længden af en modul).

ii) X er ikke semisimpel. (Det kan uden bevis benyttes, at en modul er semisimpel netop når modulen er sum af simple moduler netop når enhver undermodul er direkte summand).

iii) $NMX = 0$ og at X hverken er en R/M- eller R/N-modul.

iv) $0 \neq NX \neq X$ og $NX = S$.

Vis, at $S \simeq T$.

30. maj 1988/LK