KØBENHAVNS UNIVERSITETS MATEMATISKE INSTITUT
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 KØBENHAVN Ø. DANMARK
TELEFON (01) 35 31 33

Naturvidenskabelig embedseksamen
2. del, sommeren 1984
Hovedfag: Matematik
Opgave til besvarelse i 3 dage

stud.scient. Mikael Rørdam.

Opgave 1

Lad M være en von Neumann algebra på et Hilbert rum H.

a) Vis, at M er endelig hvis og kun hvis det for vilkårlige ækvivalente projektioner e og f fra M gælder, at $(I-e) \sim (I-f)$.

b) Antag M er en endelig von Neumann algebra og lad x i M have polardekomposition $x = vh$. Vis, at der findes en unitær u i M så $x = uh$.

Opgave 2

Lad M være en von Neumann algebra på et Hilbert rum H. Gitteret af projektioner i M siges at være modulært såfremt det for vilkårlige projektioner e, f og g fra M med $e \leq g$ gælder

$$e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge g .$$

a) Vis, at der i den ovenfor beskrevne situation altid gælder

$$e \vee (f \wedge g) \leq (e \vee f) \wedge g .$$

b) Lad e, f og g igen være projektioner fra M med $e \leq g$. Definer projektioner p, q, r og s i M ved

$$p = e \vee (f \wedge g), \quad q = (e \vee f) \wedge g, \quad r = e \vee f, \quad s = g \wedge f .$$

(Opgaven fortsættes)

Vis, at $r = p \vee f = q \vee f$ og $s = p \wedge f = q \wedge f$.

c) Idet Kaplansky ækvivalensen for projektioner e og f;

$$e \vee f - e \sim f - e \wedge f$$

forudsættes kendt, skal man vise $(p-s) \sim (q-s)$, og dernæst at gitteret M er modulært såfremt M er endelig.

Opgave 3

Lad G være en diskret gruppe hvor alle ikke trivielle konjugeret-klasser er uendelige. Vi betragter først C*-algebraen $\ell^\infty(G)$ bestående af samtlige begrænsede komplekse funktioner på G, samt venstre translations operatorerne τ_g på $\ell^\infty(G)$ givet ved $(\tau_g \varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$. Vi lader I betegne funktionen på G, der konstant antager værdien 1, og vi siger, at en positiv linearform m på $\ell^\infty(G)$ er et venstreinvariant mean på $\ell^\infty(G)$ såfremt:

1) $m(I) = 1$

2) $\forall \varphi \in \ell^\infty(G)\ \forall g \in G;\ m(\tau_g \varphi) = m(\varphi)$.

I givet fald siges G at være ameanable.

Det er vor hensigt med denne opgave at vise, at denne egenskab ved en diskret gruppe kan udtrykkes som egenskaber ved von Neumann algebraen genereret af den venstreregulære repræsentation af G.

Vi lader i det følgende H betegne Hilbert rummet $\ell^2(G)$, u_g betegne den unitære operator som τ_g inducerer på H og V von Neumann algebraen på H, som genereres af $\{u_g \mid g \in G\}$.

For ikke at gøre opgaven for uoverkommelig introduceres i det følgende lidt notation og lidt resultater.

(Opgaven fortsættes)

For en operator x i $B(H)$ defineres $\overline{co}_V(x)$ som det ultrasvagt lukkede konvekse hylster af mgd $\{uxu^* | u \text{ unitær i } V\}$.

<u>Definition</u>. V siges at have egenskab P såfremt
$\forall x \in B(H): \overline{co}_V(x) \cap V' \neq \emptyset$.

<u>Definition</u>. En projektion af norm 1 fra $B(H)$ på V er en positiv lineær afbildning π af $B(H)$ på V som opfylder $\pi^2 = \pi$.

V siges at være injektiv såfremt der findes en projektion af norm 1 fra $B(H)$ på V .

<u>Sætning</u>. Følgende betingelser er ækvivalente

I G er ameanable

II V har egenskab P

III V er injektiv.

Du ledes i det følgende frem til at vise, I $\Rightarrow$ II og III $\Rightarrow$ I. Implikationen II $\Rightarrow$ III får du foræret, men den er i øvrigt ikke spor dyb.

Lad os vise I $\Rightarrow$ II.

Som bekendt er rummet $B(H)_*$ bestående af ultrasvagt kontinuerte funktionaler på $B(H)$ et Banach rum hvis normduale netop er $B(H)$.

Antag $\ell^\infty(G)$ har et invariant mean m og lad $x \in B(H)$. Betragt afbildningen $T_x: B(H)_* \to \ell^\infty(G)$ givet ved

$$\forall \psi \in B(H)_*: \ (T_x\psi)(g) = \psi(u_g x u_g^*) \ .$$

Vis, at der findes en operator z i kommutanten til V således at $\forall \psi \in B(H)_*: \psi(z) = m(T_x\psi)$.

Vis, f.eks. ved hjælp af Hahn-Banachs sætning at V har egenskab P .

(Opgaven fortsættes)

Som sagt antager vi II $\Rightarrow$ III kendt, og vi antager ydermere, at vi kender disse resultater så godt, at vi ved, at en projektion π af norm 1 fra $B(H)$ på V tilfredsstiller følgende

$$\forall x \in B(H)\ \forall\, v_1, v_2 \in V:\ \pi(v_1 x\, v_2) = v_1 \pi(x) v_2 .$$

Lad os vise III $\Rightarrow$ I.

For at få knyttet $\ell^\infty(G)$ til vor situation med en projektion π af norm 1 fra $B(H)$ på V indlejres $\ell^\infty(G)$ som multiplikationsoperatorer på $H = \ell^2(G)$ på kanonisk måde ($\ell^\infty(G) \ni \varphi \to M_\varphi$; $(M_\varphi \xi) g = \varphi(g)\xi(g)$).

Lad tr betegne det normaliserede spor på V. Vis, at π sammensat med tr inducerer et invariant mean på $\ell^\infty(G)$.

Erik Christensen