KØBENHAVNS UNIVERSITETS MATEMATISKE INSTITUT
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 KØBENHAVN Ø. DANMARK
TELEFON (01) 35 31 33

Naturvidenskabelig embedseksamen
2. del, vinteren 1983-84
Hovedfag: Matematik
Opgave til besvarelse hjemme for

stud.scient. Jan Philip Solovej

Generelt

I det følgende betegner $\mathcal{R}$ en von Neumann algebra på et Hilbertrum $\mathcal{H}$.

Opgave 1

a) Lad A og B være operatorer i $\mathcal{R}$, som opfylder $A^*A \leq B^*B$. Vis, at der findes en operator C i $\mathcal{R}$ således at

$$A = CB .$$

b) Lad $(A_i)_I$ være en familie af operatorer og S en enkelt operator fra $\mathcal{R}$, om hvilke det gælder

$$\sum_I A_i^* A_i = S^*S .$$

Vis, at der findes en familie $(C_i)_I$ af operatorer fra $\mathcal{R}$ således, at

$$\forall i \in I: A_i = C_i S \quad \text{og} \quad \sum_I C_i^* C_i = R[S] ,$$

idet $R[S]$ betegner værdiprojektionen for S.

(Opgavesættet fortsættes)

Definition

Lad S og T være positive operatorer fra R. Vi skriver $S \approx T$, såfremt der findes en familie $(A_i)_{i \in I}$ af operatorer i R således, at

$$S = \sum_I A_i^* A_i \quad \text{og} \quad T = \sum_I A_i A_i^* .$$

Opgave 2

a) Lad $(A_i)_I$ og $(B_j)_J$ være familier af operatorer og S en positiv operator fra R som opfylder

$$S^2 = \sum_I A_i A_i^* = \sum_J B_j^* B_j .$$

Vis, at der findes operatorer C_{ij} i R således at

$$\forall_j : B_j B_j^* = \sum_i C_{ij} C_{ij}^*$$

$$\forall_i : A_i^* A_i = \sum_j C_{ij}^* C_{ij} .$$

b) Vis, at $\approx$ er en ækvivalensrelation på mængden af positive operatorer i R.

Definition

Lad S og T være positive operatorer fra R. Vi skriver $S \lessapprox T$ såfremt, der findes en positiv operator S_0 i R således at $S \approx S_0 \leq T$.

Bemærkning

Det kan vises, at $S \lessapprox T$ og $T \lessapprox S$ medfører $S \approx T$,

(Opgavesættet fortsættes)

samt at $S \lesssim T$ og $T \lesssim R$ medfører $S \lesssim R$. Man kan derfor indse at $\lesssim$ inducerer en partiel orden på ækvivalensklasserne for relationen $\approx$.

Definition

Ved den centrale støtte for en operator A fra $\mathcal{R}$ forstås den mindste centrale projektion P fra $\mathcal{R}$, som opfylder $PA = A$.

Den centrale støtte for A betegnes $C[A]$.

Opgave 3

Lad A og B være positive operatorer fra $\mathcal{R}$.

a) Vis, at følgende udsagn er ækvivalente

1. $\exists\, S,T \in \mathcal{R}^+ : 0 \neq S,\ S \leq A,\ T \leq B$ og $S \approx T$.
2. $C[A]\, C[B] \neq 0$.

b) Vis, at der findes en central projektion P i $\mathcal{R}$ således, at

$$PA \lesssim PB \quad \text{og} \quad (I-P)B \lesssim (I-P)A .$$

Bemærkning

Det kan vises, at ækvivalensklasserne under $\approx$ er normlukkede, og at hver ækvivalensklasse indeholder netop et centralt element. Ved hjælp af dette resultat kan man dernæst vise eksistensen af spor i en algebra, som er endelig m.h.t. $\approx$.

Det bør også bemærkes, at man for projektioner P og Q fra $\mathcal{R}$ kan vise, at $P \sim Q$ hvis og kun hvis $P \approx Q$.