KØBENHAVNS UNIVERSITETS MATEMATISKE INSTITUT
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 KØBENHAVN Ø. DANMARK
TELEFON (01) 35 31 33

Naturvidenskabelig embedseksamen
2. del, sommeren 1982
Hovedfag: Matematik
Opgave til besvarelse i 4 timer for

stud.scient. Poul Hjorth

Opgave nr. 1

Lad A være et delrum af et topologisk rum X med inklusionsafbildning $i: A \to X$. Som bekendt siges A at være et retrakt af X, hvis der findes en kontinuert afbildning $r: X \to A$ så $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

Vis, at hvis A er et retrakt af X, så er homologimodulerne

$$H_q(X) \quad \text{og} \quad H_q(A) \oplus H_q(X,A)$$

isomorfe for alle $q \geq 0$.

Opgave nr. 2

I den 2-dimensionale kugleflade

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1\}$$

betragtes delrummene

$$X = \{x \in S^2 \mid -\tfrac{1}{2} \leq x_3 \leq \tfrac{1}{2}\}$$

og

$$A = \{x \in S^2 \mid x_3 = -\tfrac{1}{2} \text{ eller } x_3 = \tfrac{1}{2}\} .$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

1^o. Beregn den relative singulære homologi af parret (X,A).

2^o. Vis, at A ikke er et retrakt af X.

Opgave nr. 3

Beskriv i grundtræk en metode til beregning af den singulære homologi af et endeligt cellulært rum (spherical complex).

Opgave nr. 4

Lad $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ betegne enhedscirklen i den komplekse plan og antag, at $f_k \colon S^1 \to S^1$ er en kontinuert afbildning, så den inducerede homomorfi

$$H_1(f_k) : H_1(S^1) \to H_1(S^1)$$

er multiplikation med $k \in \mathbb{N}$.

Betragt adjunktionsrummet $M_k = S^1 \cup_{f_k} E^2$ opstået ved at klæbe 2-cellen E^2 på S^1 via afbildningen $f_k \colon \partial E^2 = S^1 \to S^1$.

1^o. Beregn de singulære homologigrupper af M_k, dels med heltallige koefficienter, og dels med koefficienter i den cykliske gruppe af orden k.

2^o. Gør rede for eksistensen af en afbildning $f_k \colon S^1 \to S^1$, der inducerer multiplikation med k som ovenfor.