Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Diskret matematik

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet består af otte opgaver og er på 2 sider. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

Opgave 1

Undersøg om det sammensatte udsagn

$$(\neg p \to (q \vee r)) \to ((q \to p) \to r)$$

er logisk ækvivalent med $p \to r$.

Opgave 2

Talfølgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er givet induktivt ved $a_1 = 2$ og

$$na_{n+1} = 3(n+1)a_n \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = 2n3^{n-1} \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

Opgave 3

Lad $M = \{2, 8, 18, 32, 50, 128, 288, 1152\}$. Betragt den binære relation R på M defineret ved at aRb, hvis og kun hvis b/a er et kvadrattal (dvs. et tal, der kan skrives som kvadratet af et helt tal).

Vis, at R er en partiel ordningsrelation. Angiv Hassediagrammet for relationen R på M.

Opgave 4

Lad den binære operation $*$ på $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ være defineret ved

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

Vis, at $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ er en monoid, men ikke en gruppe. Bestem samtlige elementer i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, der ikke har et inverst element.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000
Diskret matematik

Opgave 5

Udregn A^{-1} for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

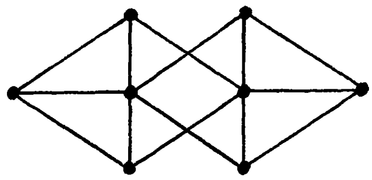
ved brug af rækkeoperationer.

Opgave 6

Betragt mængden $G = \{[1]_{18}, [5]_{18}, [7]_{18}, [11]_{18}, [13]_{18}, [17]_{18}\}$.
Vis, at $(G, \times_{18})$, hvor $\times_{18}$ er restklassemultiplikation modulo 18, er en cyklisk gruppe.

Opgave 7

Betragt nedenstående ikke orienterede graf Γ.



Angiv 6 ikke isomorfe udspændende træer i Γ. Begrund, at Γ ikke er en Euler graf. Find en Hamilton kreds i Γ.

Opgave 8

En ikke orienteret graf Λ er givet ved sin nabomatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn grafen. Begrund, at Λ ikke er planar.