Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Diskret matematik

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes. Opgavesættet består af otte opgaver og er på 3 sider. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

Opgave 1

Angiv sandhedstabellen for det sammensatte udsagn

$$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \vee r)).$$

Opgave 2

Talfølgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er givet induktivt ved $a_1 = 0$ og

$$a_n = a_{n-1} + 3(n^2 - n) \quad \text{for} \quad n \geq 2.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = n^3 - n \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

Opgave 3

På mængden $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ betragtes den binære relation R defineret ved at $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ hvis og kun hvis $x_1 y_2 \leq x_2 y_1$.
Vis, at R er refleksiv og transitiv, men hverken symmetrisk eller antisymmetrisk.

Opgave 4

Lad M være mængden af 3×3-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } a, b \in \mathbb{R}.$$

Vis, at M er lukket både under sædvanlig matrixmultiplikation $\cdot$ og under matrixaddition $+$. Afgør om $(M, \cdot)$ og $(M, +)$ er monoider, henholdsvis grupper.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999
Diskret matematik

Opgave 5

Udregn A^{-1} for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

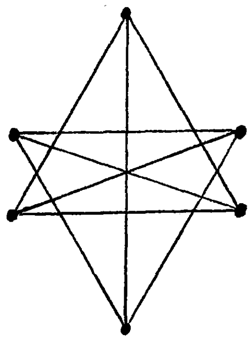
ved brug af rækkeoperationer.

Opgave 6

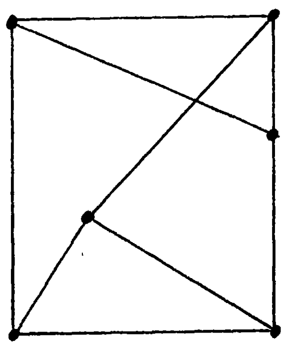
Lad $G = \{[1]_{14}, [3]_{14}, [5]_{14}, [9]_{14}, [11]_{14}, [13]_{14}\}$.
Vis, at $(G, \times_{14})$, hvor $\times_{14}$ er restklassemultiplikation modulo 14, er en gruppe, og afgør, om den er cyklisk. Bestem undergruppen frembragt af $[9]_{14}$.

Opgave 7

Betragt nedenstående ikke orienterede grafer Γ_1 og Γ_2:



Γ_1



Γ_2

Angiv for hver af de to grafer antal punkter (knuder) og kanter samt fordeling af valenser.
Afgør, om Γ_1 og Γ_2 er isomorfe.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999
Diskret matematik

Opgave 8

En ikke orienteret graf Λ er givet ved sin nabomatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn grafen. Begrund, at Λ ikke er planar.