Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998–1999

Diskret matematik

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet består af otte opgaver og er på 2 sider. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

Opgave 1

Undersøg, om det sammensatte udsagn

$$(p \to \overline{q}) \vee (r \to (p \wedge q))$$

er en tautologi.

Opgave 2

Talfølgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er givet induktivt ved $a_1 = 1$ og

$$a_n = a_{n-1} + 2(1 + (-1)^n) \quad \text{for } n \geq 2.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = 2n + (-1)^n \quad \text{for } n \geq 1.$$

Opgave 3

Lad $(G, *)$ være en gruppe. Betragt den binære relation R på $G \times G$ defineret ved at $(g_1, g_2) R (h_1, h_2)$ hvis og kun hvis $g_1^2 * g_2^2 = h_1^2 * h_2^2$.

Vis, at R er en ækvivalensrelation.

Eftervis endvidere, at der for $(G, *) = (\mathbb{Z}/5 - \{[0]_5\}, \times_5)$, hvor $\times_5$ er restklassemultiplikation modulo 5, er netop to ækvivalensklasser, og angiv en repræsentant for hver af dem.

Opgave 4

Lad M være mængden af 2×2-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } a, b \in \mathbb{R}.$$

Vis, at M med sædvanlig matrixmultiplikation som binær operation er en monoid, men ikke en gruppe. Bestem samtlige elementer i M, der ikke har et inverst element.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 5

For $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ betragtes 3×3-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Udregn A^{-1} ved brug af rækkeoperationer.

Opgave 6

Lad $G = \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}$. Vis, at $(G, \times_{10})$, hvor $\times_{10}$ er restklassemultiplikation modulo 10, er en gruppe, og afgør, om den er cyklisk. Bestem samtlige undergrupper af $(G, \times_{10})$.

Opgave 7

Betragt nedenstående ikke orienterede graf Γ.

Angiv 5 ikke isomorfe udspændende træer i Γ.

Afgør, hvorvidt Γ er en Euler graf, henholdsvis en Hamilton graf.

Opgave 8

En ikke orienteret graf Λ er givet ved sin nabomatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn grafen. Begrund, at Λ ikke er planar.