Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet, juni 1998.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Angiv sandhedstabellen for det sammensatte udsagn

$$(p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge ((p \rightarrow q) \rightarrow r) .$$

OPGAVE 2.

Talfølgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er givet induktivt ved $a_1 = 1$ og

$$a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n \quad for \quad n \geq 2 .$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \quad for \quad n \geq 1 .$$

OPGAVE 3.

Lad G være mængden af 2×2-matricer af formen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$. Vis, at matrixproduktet af to vilkårlige matricer fra G tilhører G. Vis dernæst, at G udgør en gruppe med sædvanlig matrix multiplikation som binær operation.

OPGAVE 4.

Lad $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x, y) = (-x + y, -x)$. Vis, at

$$(f \circ f \circ f)(x, y) = (x, y) .$$

Begrund, at f er bijektiv, og at $f^{-1} = f \circ f$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 5.

Betragt gruppen S_3 af permutationer af $\{1, 2, 3\}$. Vis, at hvert af elementerne

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kan skrives som produkt af 2 permutationer, begge blandt

$$p_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad p_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

OPGAVE 6.

Udregn A^{-1} for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

OPGAVE 7.

I denne opgave betragtes ikke orienterede simple grafer, der er sammenhængende, og som har den egenskab, at valensen for to vilkårlige nabopunkter i grafen afviger med 1 (hvis et punkt v fx har valens 3 skal alle nabopunkter til v have valens 2 eller 4). Angiv blandt sådanne grafer mindst 3 ikke-isomorfe træer med $1 < |V| \leq 11$, og mindst 4 ikke-isomorfe grafer, som ikke er træer og ligeledes har $1 < |V| \leq 11$.

OPGAVE 8.

En ikke orienteret graf Γ er givet ved sin nabomatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn grafen Γ. Begrund, at Γ ikke er planar.