Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet, januar 1998.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Udregn sandhedstabellen for det sammensatte udsagn

$$(p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge (\overline{q} \vee (r \rightarrow p)) \,.$$

OPGAVE 2.

Vis ved induktion, at

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7)$$

for $n \geq 1$.

OPGAVE 3.

Betragt mængden M af alle 2×2-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix},$$

hvor $a > 0$, $d > 0$, $c \geq 0$. Vis, at M med sædvanlig matrixmultiplikation som binær operation er en monoid, men at M ikke er en gruppe.

OPGAVE 4.

Betragt gruppen $G = \mathbb{Z}/11 - \{[0]\}$ med restklassemultiplikation modulo 11 som binær operation. Undersøg om afbildningen $f : G \rightarrow G$, der er defineret ved, at $f(a) = a^3$, er bijektiv.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 5.

Udregn A^{-1} for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

OPGAVE 6.

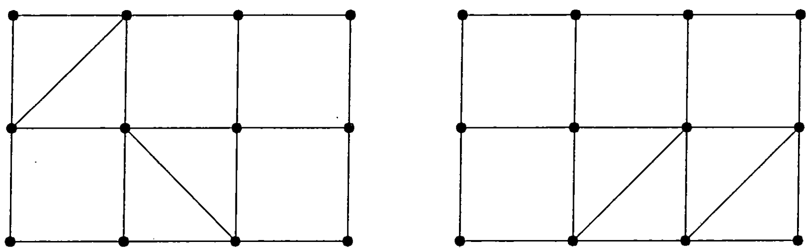
Betragt en abelsk gruppe G med neutralt element e. Antag, at $a \in G$ har elementorden 2 og $b \in G$ har elementorden 3. Vis, at ab har elementorden 6. Vink: Begrund specielt, at $ab \neq e$ og $(ab)^5 = ab^2 \neq e$.

OPGAVE 7.

I denne opgave betragtes kun træer, hvor alle valenser er ulige, dvs. tilhører mængden $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Angiv for sådanne træer 2 ikke isomorfe med 5 kanter, 3 ikke isomorfe med 7 kanter og 7 ikke isomorfe med 9 kanter.

OPGAVE 8.

Betragt nedenstående ikke orienterede grafer Γ_1 og Γ_2:



Γ_1 Γ_2

Undersøg for de to grafer antal punkter, antal kanter og fordelingen af valenser på punkterne. Vis dernæst, at Γ_1 og Γ_2 er ikke isomorfe. Vink: Studér f. eks. punkter af valens 3.