

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregner kan benyttes.

Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Angiv sandhedstabellen for det sammensatte udsagn

$$(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (\bar{p} \wedge (r \rightarrow q)).$$

OPGAVE 2.

Talfølgen a_0, a_1, a_2, \dots er givet induktivt ved $a_0 = 2$ og

$$a_{n+1} = 2a_n - n \text{ for } n \geq 0.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = 2^n + n + 1 \text{ for } n \geq 0.$$

OPGAVE 3.

Lad G være mængden af 2×2 -matricer af formen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

hvor $a, b, d \in \mathbb{R}$ og $a > 0, d > 0$. Vis, at G udgør en gruppe med sædvanlig matrixmultiplikation som binær operation.

OPGAVE 4.

Lad G være samme mængde af 2×2 -matricer som i opgave 3. Vi betragter afbildningen $f : G \rightarrow G$ defineret ved $f : A \mapsto A^2$. Vis, at denne afbildning er en bijektion. Angiv $f^{-1}(A)$, når $a = d = 4$ og $b = -4$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 5.

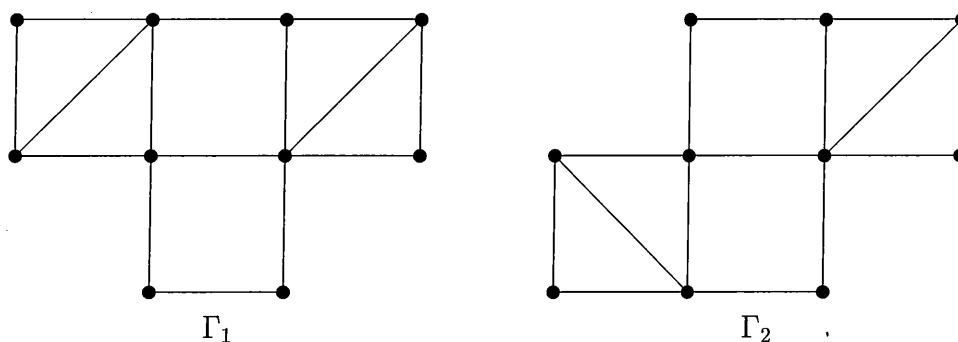
Vi betragter gruppen $G = \mathbb{Z}/11 - \{[0]_{11}\}$ med \times_{11} (multiplikation modulo 11) som binær operation. Vis, at $[2]_{11}$ er en frembringer for G . Vis også, at $[7]_{11}$ er en frembringer for G . Vink: I det sidste spørgsmål kan man med fordel benytte, hvordan $[7]_{11}$ skrives som potens af $[2]_{11}$.

OPGAVE 6.

Lad G være en gruppe og H en undergruppe i G . Betragt den binære relation R på G defineret ved $g_1 R g_2$, hvis $g_1^{-1} g_2 \in H$. Vis, at R er en ækvivalensrelation på G .

OPGAVE 7.

Betragt nedenstående ikke orienterede grafer Γ_1 og Γ_2 :



Angiv for hver af de to grafer antal punkter og kanter samt fordeling af valenser. Vis dernæst, at Γ_1 og Γ_2 ikke er isomorfe.

OPGAVE 8.

Lad Σ være en sammenhængende ikke orienteret graf. Ved en *farvning* af Σ forstås en tildeling af farver til V_Σ , så at nabohjørner har forskellige farver. Det *kromatiske tal* for Σ er det mindste antal farver, hvormed Σ kan farves.

Bestem det kromatiske tal for hver af følgende grafer:

- 1) Den fuldstændige graf K_n , $n \geq 1$, 2) den fuldstændige 2-delte graf $K_{3,3}$, 3) Petersens graf.

Der ønskes en kort begrundelse for de angivne kromatiske tal.