Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig kandidateksamen, maj 1996.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Vis, at

$$(((p \to q) \land (q \to r)) \lor (p \leftrightarrow r)) \equiv (p \to r) .$$

OPGAVE 2.

Vis ved induktion, at

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) \;\; for \;\; n \geq 1 .$$

OPGAVE 3.

Betragt 2×2-matricerne

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vis, at $G = \{I, S_1, S_2, R_1, R_2, R_3\}$ udgør en gruppe med matrixmultiplikation som binær operation.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 4.

På mængden $\mathbb{R}^2$ betragtes den binære relation R defineret ved $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, hvis og kun hvis $x_1 \leq x_2$ og $y_1 \geq y_2$. Vis, at R er en partiel ordningsrelation på $\mathbb{R}^2$. Er R en fuldstændig (total) ordningsrelation? Begrund svaret.

OPGAVE 5.

Betragt gruppen $G = \mathbb{Z}/13 - [0]_{13}$ med $\times_{13}$ (multiplikation modulo 13) som binær operation. Lad H være mængden af de restklasser i G, som er kvadrater på restklasser i G. Angiv elementerne i H, og begrund, at H er en undergruppe i G.

OPGAVE 6.

Udregn A^{-1} for 3×3-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

OPGAVE 7.

Vi betragter et træ Γ, med $|V| = n > 1$ og (derfor) $|E| = n - 1 > 0$. Valenserne for de n hjørner betegnes $v_1, \ldots, v_n$. Begrund, at

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2(n-1) ,$$

og udled heraf, at Γ har mindst 2 *ender*, dvs. hjørner med valens 1. Angiv et træ med $|V| = n > 1$ og netop 2 ender.

OPGAVE 8.

En ikke orienteret graf Σ er givet ved, at nabomatricen (adjacency matrix) er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn Σ. Undersøg, om Σ er planar.