Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1996.

# DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

## OPGAVE 1.

Undersøg om

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p) \wedge \overline{(p \leftrightarrow r)}$$

er en kontradiktion.

## OPGAVE 2.

Talfølgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er givet induktivt ved $a_0 = 1, \quad a_1 = 6$ og

$$a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad for \quad n \geq 2 \,.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = 2^n(2n+1) \,.$$

## OPGAVE 3.

Betragt mængden $G = \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\}$. Vis, at $(G, \times_9)$, hvor $\times_9$ er restklassemultiplikation modulo 9, er en cyklisk gruppe.

## OPGAVE 4.

Lad $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Betragt den binære relation $R$ på $M$ defineret ved, at $aRb$, hvis $b/a$ er et ulige helt tal. Vis, at $R$ er en partiel ordningsrelation. Angiv Hassediagrammet for relationen $R$ på $M$.

(Opgavesættet fortsætter)

## OPGAVE 5.

Betragt $3 \times 3$-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Udregn $A^{-1}$.

## OPGAVE 6.

Lad $(G_1, *_1)$ og $(G_2, *_2)$ være grupper med etelementer $e_1$ og $e_2$. I mængden $G = G_1 \times G_2$ betragtes den binære operation $*$ defineret ved

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2) .$$

Vis, at $(G, *)$ er en gruppe.

## OPGAVE 7.

I denne opgave betragtes kun træer, hvor der højst er et punkt med valens $> 2$. Angiv for sådanne træer 5 ikke isomorfe med 5 kanter og 7 ikke isomorfe med 6 kanter.

## OPGAVE 8.

En ikke orienteret graf $\Gamma$ er givet ved, at nabomatricen (adjacency matrix) er

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn $\Gamma$. Begrund, at $\Gamma$ ikke er planar.