Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedsekasamen, juni 1995.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Angiv sandhedstabellen for det sammensatte udsagn $((p \to q) \wedge (q \to r)) \vee (p \to r)$.

OPGAVE 2.

Talfølgen a_n er defineret induktivt ved $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ og

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad for \quad n \geq 2 .$$

Vis ved induktion, at

$$(a_n + a_{n-1})^2 - 2{a_n}^2 = (-1)^n \quad for \quad n \geq 1 .$$

OPGAVE 3.

En $n \times n$-matrix A antages at opfylde betingelsen $A^3 = O$, hvor $O = O_{n \times n}$ er nulmatricen. Idet $I = I_n$ er enhedsmatricen, skal det vises, at

$$B = I - A + A^2$$

opfylder $(I + A)B = B(I + A) = I$. Find herved

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 4.

For en gruppe G betragtes den binære relation R på G defineret ved

$$aRb \text{ hvis og kun hvis der findes et } g \in G, \text{ så } b = gag^{-1}.$$

Vis, at R er en ækvivalensrelation. Angiv ækvivalensklasserne for den symmetriske gruppe S_3, der permuterer $\{1, 2, 3\}$.

OPGAVE 5.

Betragt gruppen $G = \mathbb{Z}/7 - \{[0]_7\}$ med multiplikation modulo 7 som binær operation. Angiv ordenen for hvert element i G. Begrund, at G er en cyklisk gruppe af orden 6, og angiv en undergruppe af orden 3.

OPGAVE 6.

Lad $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Betragt den binære relation R på M defineret ved, at aRb, hvis $a \leq b$ og $r(a) \leq r(b)$, hvor $r(n)$ er antallet af (ikke nødvendigvis forskellige) faktorer i en primfaktoropløsning $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ af n for $n > 1$, og $r(1) = 0$. Vis, at R er en partiel ordningsrelation. Angiv Hassediagrammet for relationen R på M.

OPGAVE 7.

I denne opgave betragtes kun træer, hvor alle valenser er ≤ 3. Angiv for sådanne træer 2 ikke isomorfe med 4 kanter, 4 ikke isomorfe med 5 kanter og 6 ikke isomorfe med 6 kanter.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 8.

Resultatet af en dobbeltrundig skakturnering mellem 6 deltagere A, B, C, D, E, F er som angivet i nedenstående turneringstabel:

	A	B	C	D	E	F
A	-	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
B	1	-	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
C	1	$\frac{1}{2}$	-	0	1	1
D	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-	0	$\frac{1}{2}$
E	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	-	1
F	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-

Bemærk, at 1 på plads (A, C) betyder, at A vandt over C, $\frac{1}{2}$ på plads (A, B), at A og B spillede remis, og 0 på plads (A,D), at A tabte til D.

Konstruer gevinstgrafen Γ, der har hjørner A, B, C, D, E, F og en orienteret kant for hvert gevinstparti, orienteret fra vinderen til taberen. Er Γ stærkt sammenhængende?