Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1995.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Undersøg om

$$((p \to q) \wedge (q \to p) \wedge (q \to r)) \to (p \leftrightarrow r)$$

er en tautologi.

OPGAVE 2.

Vis ved induktion, at

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad for \;\; n = 1, 2, 3, \dots .$$

OPGAVE 3.

I en gruppe G med etelement e vides, at elementet a tilfredsstiller $a^n = e$ for et positivt helt tal n. Hvilken information giver dette om ordenen af elementet a?

Betragt gruppen $(\mathbb{Z}/17 - [0]_{17}, \times_{17})$. Udregn potenserne a^2, a^4, a^8, a^{16} for elementet $a = [3]_{17}$. Begrund herved, at a har orden 16.

OPGAVE 4.

Lad $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Betragt den binære relation R på M defineret ved, at aRb, hvis $a \leq b$, og der for ethvert primtal p, som går op i a, gælder, at p også går op i b. Vis, at R er en partiel ordningsrelation. Angiv Hassediagrammet for relationen R på M.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 5.

Betragt 4×4-matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

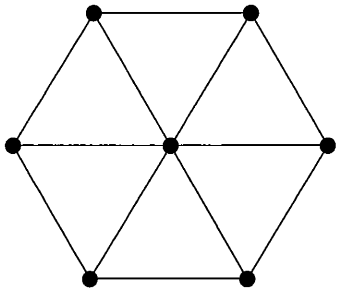
hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Udregn AB, og find herved formlen for A^{-1}.

OPGAVE 6.

I $\mathbb{R}$ betragtes den binære komposition $*$ defineret ved $a * b = a + b + ab$. Vis, at $(\mathbb{R}, *)$ er en kommutativ monoid. Udregn $a * (-1)$, og vis herved, at $(\mathbb{R}, *)$ ikke er en gruppe. Udregn endelig $a^{*3} = a * a * a$.

OPGAVE 7.

Betragt nedenstående ikke orienterede graf Γ.



Angiv en Hamilton kreds i Γ. Angiv dernæst 8 ikke isomorfe udspændende træer i Γ.

OPGAVE 8.

En ikke orienteret graf Σ er givet ved, at V_Σ består af alle tegnstrenge skrevet med det danske alfabet og af længde 8. To punkter v_1 og v_2 er forbundet med en kant, hvis de to tegnstrenge stemmer overens pånær højst en plads. Vis, at Σ er sammenhængende. Med $\ell(v_1, v_2)$ betegnes længden af den korteste vej fra v_1 til v_2. Hvad er den største værdi $\ell(v_1, v_2)$ antager?