Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, juni 1994.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Der er givet to udsagn A_1 og A_2. For heltal $n > 2$ defineres A_n induktivt som implikationen $A_{n-2} \to A_{n-1}$. Begrund, at A_{1000} er en tautologi.

OPGAVE 2.

Antag, at R er en partiel ordning på mængden A. Lad S være relationen på $A \times A$ defineret ved, at

$$(x_1, x_2)S(y_1, y_2) \text{ hvis og kun hvis } x_1Ry_1 \text{ og } x_2Ry_2.$$

Vis, at S er en partiel ordning på $A \times A$.

OPGAVE 3.

Det vides, at $\mathbf{Z}/17 - \{[0]\} = \{[1], [2], \ldots, [16]\}$ er en gruppe med multiplikation modulo 17 som den til gruppen hørende binære operation. Hvad er det inverse element til $[4]$ i denne gruppe ?

OPGAVE 4.

Undersøg, om der findes en Hamilton-kreds i den komplette 2-delte graf $K_{4,5}$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 5.

Vis, at 3×3-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$, med den sædvanlige matrixmultiplikation danner en gruppe.

OPGAVE 6.

Antag, at $(S, *)$ er en monoid og at relationen R på S er defineret ved at

$$aRb \text{ hvis og kun hvis der findes } x, y \in S, \text{ så } a * x = b \text{ og } b * y = a.$$

Vis, at R er en ækvivalensrelation på S, men at dette ikke behøver at gælde, hvis man kun forlanger, at S er en semigruppe.

OPGAVE 7.

Lad Γ være en sammenhængende ikke-orienteret graf, der forbliver sammenhængende efter fjernelse af en vilkårlig kant. Begrund, at der for to vilkårlige forskellige kanter e_1 og e_2 findes et udspændende træ, som indeholder e_1 men ikke e_2.

OPGAVE 8.

Giv en fornuftig definition af, hvornår to orienterede grafer er isomorfe, og tegn 9 ikke-isomorfe orienterede grafer, der alle fremkommer ved orientering af kanterne i grafen