Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1994.

# DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

## OPGAVE 1.

Undersøg om

$$(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow r) \vee (r \leftrightarrow p)$$

er en tautologi.

## OPGAVE 2.

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vis ved induktion, at

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

## OPGAVE 3.

Lad $(G, *)$ være en gruppe og $f : G \times G \to G \times G$ afbildningen defineret ved

$$f(x, y) = (y, x * y).$$

Vis, at $f$ er bijektiv.

(Opgavesættet fortsætter)

## OPGAVE 4.

Betragt gruppen $(\mathbb{Z}/8, +_8)$, hvor $\mathbb{Z}/8 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7]\}$. Hvilke frembringere og hvilke undergrupper har denne gruppe?

## OPGAVE 5.

Lad $(S, *)$ være en monoid og $aRb$ for $a, b \in S$ betyde, at der findes et $x \in S$, så $a * x = b$. Vis, at relationen $R$ er refleksiv og transitiv, men at $R$ i tilfældet $(\mathbb{Z}, \times)$ hverken er symmetrisk eller antisymmetrisk.

## OPGAVE 6.

Lad $R$ være en partiel ordning på en ikke-tom mængde $A$, og lad $G$ være den orienterede graf, hvis punkter er elementerne i $A$ , og hvis kanter er par $(a_1, a_2)$, for hvilke $a_1 R a_2$, således at $(a_1, a_2)$ er en kant fra $a_1$ til $a_2$. Begrund, at $G$ kun er stærkt sammenhængende, hvis $a_1 R a_2$ er opfyldt for alle $(a_1, a_2) \in A \times A$.

## OPGAVE 7.

Tegn to ikke-isomorfe træer, der begge har i alt 8 punkter, hvoraf 4 med valens 1, 2 med valens 2 og 2 med valens 3. Begrund, at de to træer ikke er isomorfe.

## OPGAVE 8.

Undersøg om nedenstående graf med 6 punkter og 9 kanter er planar.