Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, juni 1993.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Vis, at

$$(a \to (b \to c)) \leftrightarrow ((a \to b) \to c)$$

er logisk ækvivalent med

$$a \vee c.$$

OPGAVE 2.

En talfølge $c_1, c_2, c_3, \ldots$ er givet induktivt ved

$$\begin{cases} c_1 & = a \\ c_2 & = b \\ c_{n+2} & = \frac{c_n + c_{n+1}}{2} \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Vis ved induktion, at

$$c_n = \frac{a+2b}{3} - \frac{4}{3}(a-b)(-\frac{1}{2})^n$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Lad $M = \{[1], [5], [7], [11]\}$ og lad $\times_{12}$ være multiplikation modulo 12. Vis, at $(M, \times_{12})$ er en gruppe. Er det en cyklisk gruppe?

OPGAVE 4.

Lad $(G, *)$ være en gruppe, der ikke behøver at være kommutativ. Definér den binære operation $\bullet$ på G ved

$$g_1 \bullet g_2 = g_2 * g_1.$$

Vis, at $(G, \bullet)$ også er en gruppe, samt at elementer $g \in G$ har samme inverse element g^{-1} i de to grupper $(G, *)$ og $(G, \bullet)$.

OPGAVE 5.

Lad G være mængden af 2×2-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ hvor } a > 0 \text{ og } b \leq 0 \quad .$$

Vis, at G med matrixmultiplikation som binær operation er en monoid, men ikke en gruppe.

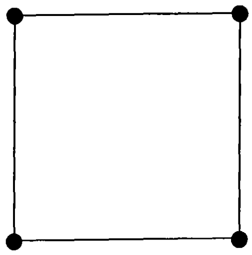
OPGAVE 6.

Lad Σ være den orienterede graf, hvis punkter er samtlige tegnstrenge af længde fra 1 til 9 med tegn fra det danske alfabet. Der går en kant fra punkt v_i til punkt v_j, hvis v_i er en delstreng af v_j. Er denne orienterede graf sammenhængende? Er den stærkt sammenhængende?

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

Lad M være mængden af *sammenhængende* delgrafer af grafen



På M defineres relationen R ved at $G_1 R G_2$ betyder, at G_1 er en delgraf af G_2. Begrund, at R er en partiel ordning, og tegn et Hasse-diagram for R.

OPGAVE 8.

Relationen R på mængden af kanter E hørende til en graf Σ defineres ved at $e_1 R e_2$ er opfyldt netop når $e_1 = e_2$ eller der findes en kreds, som indeholder både e_1 og e_2. Vis, at R er en ækvivalensrelation.