Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1993.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

I det følgende er t en tautologi, og p og q er to simple (usammensatte) udsagn. Lad M være mængden $\{t, p \vee q, p \to q, q \to p\}$ af udsagn. Implikationen $\to$ kan opfattes som en binær operation på M i den forstand, at hvis R_1 og R_2 er to vilkårlige udsagn i M, så er $R_1 \to R_2$ logisk ækvivalent med netop ét af udsagnene i M. F.eks. er $(p \vee q) \to (q \to p)$ logisk ækvivalent med $q \to p$. Udfyld hele nedenstående tabel (begrundelser er ikke nødvendige):

$\to$	t	$p \vee q$	$p \to q$	$q \to p$
t				
$p \vee q$				$q \to p$
$p \to q$				
$q \to p$				

Er M med den herved definerede komposition en semigruppe ?

OPGAVE 2.

Lad $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en voksende følge af reelle tal. (Dvs. at $a_n < a_{n+1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$). Lad b_n være middelværdien af $a_1, a_2, \ldots, a_n$, hvilket induktivt kan defineres som

$$\begin{cases} b_1 & = a_1 \\ b_{n+1} & = \frac{nb_n + a_{n+1}}{n+1} \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Vis ved induktion, at $b_n < a_n$ og $b_{n-1} < b_n$ for $n = 2, 3, \ldots$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Der er givet en mængde M og en afbildning $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, der til delmængder af M knytter delmængder af M, således at $f(X) \subseteq f(Y)$, når $X \subseteq Y \subseteq M$. Lad $\mathcal{K}$ være mængden af $X \subseteq M$ for hvilke $f(X) \subseteq X$.

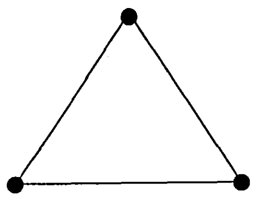
(1) Vis at $M \in \mathcal{K}$.
(2) Vis at $X \in \mathcal{K}$ medfører $f(X) \in \mathcal{K}$.
(3) Vis at $X \in \mathcal{K}$ og $Y \in \mathcal{K}$ medfører $X \cap Y \in \mathcal{K}$.

OPGAVE 4.

Lad relationen R være defineret ved, at XRY for endelige mængder X og Y betyder, at den symmetriske differens $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ indeholder et *lige* antal elementer. Vis at R er en ækvivalensrelation.

OPGAVE 5.

Lad M være mængden af delgrafer af den komplette graf



På M defineres relationen R ved at $G_1 R G_2$ betyder, at G_1 er en delgraf af G_2. Begrund at R er en partiel ordning, og tegn et Hasse-diagram for R.

OPGAVE 6.

Lad M være $\{0, 1, 2, \ldots, 255\}$ og lad $f : M \to M$ være afbildningen defineret ved, at $f(x)$ er det entydigt bestemte element i M, som er kongruent med x^2 modulo 256.

Vis (f.eks. ved at betragte tilfældene x lige og x ulige hver for sig), at der ikke findes noget $x \in M$, så $f(x) = 2$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

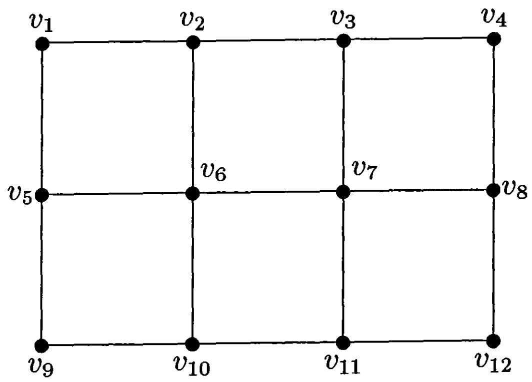
Lad G være mængden af 2×2-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R} \text{ og } a^2 + b^2 = 1.$$

Vis at G med matrixmultiplikation som komposition er en gruppe, og at $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ er det inverse element til $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

OPGAVE 8.

Lad G være grafen



Angiv et udspændende træ med netop 11 kanter, hvor alle knudepunkter har valens 2, og forklar, hvorfor der ikke findes noget udspændende træ med netop 12 kanter.