Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, juni 1992.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Find et simplere udsagn, der er logisk ækvivalent med

$$(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$$

og gør rede for, at de to udsagn er logisk ækvivalente.

OPGAVE 2.

Lad følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være givet ved

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 3, \\ a_n &= 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ for } n = 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Vis, at der for alle positive heltal n gælder $a_{n+1} = a_n + 2^n$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Forklar, hvorfor der for vilkårlige mængder A og B gælder

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B),$$

men at der ikke behøver at gælde

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B).$$

($\mathcal{P}(X)$ er potensmængden hørende til X).

OPGAVE 4.

Om en funktion $f : M \to M$ vides at

$$f \circ f = f.$$

Vis, at f er den identiske afbildning id_M, både når f er injektiv og når f er surjektiv.

OPGAVE 5.

Lad M være mængden af ordnede par af reelle tal. Vi definerer relationen R på M ved at (x_1, y_1) står i relationen R til (x_2, y_2) netop når

$$x_1 + y_2 = x_2 + y_1.$$

Gør rede for, at R er en ækvivalensrelation, og beskriv ækvivalensklassen, som indeholder $(0, 0)$.

OPGAVE 6.

Lad G være mængden af 2×2-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

hvor x er et vilkårligt helt tal. Begrund, at G med matrixmultiplikation som komposition er en gruppe.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

En orienteret graf G_1 er givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Dvs. at grafens knudepunkter er nummereret, så a_{ij} er antallet af kanter fra punkt i til punkt j). Lad G_2 være den graf, der fremkommer ved at orienteringen af alle kanter i G_1 vendes.

Angiv matricen A_2 hørende til G_2 og undersøg om G_1 og G_2 er isomorfe.

OPGAVE 8.

I en sammenhængende graf med knudepunkt a defineres relationen R på knudepunkterne ved, at xRy betyder at enhver vej fra a til y indeholder x.

Gør rede for, at R er en partiel ordning.