Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1992.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Lad $\oplus$ være konnektivet defineret ved

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Vis de logiske ækvivalenser

$$\begin{aligned} (u \oplus v) &\iff \neg(u \leftrightarrow v) \\ (u \leftrightarrow v) \to (x \leftrightarrow y) &\iff (x \oplus y) \to (u \oplus v) \end{aligned}$$

OPGAVE 2.

Der er givet en mængde M og en afbildning $f : M \to M$.

Vis at f er bijektiv hvis og kun hvis f^2 er bijektiv.

OPGAVE 3.

Lad R være en transitiv relation på en mængde M.

Vis ved induktion, at R^n er transitiv for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 4.

Om to talfølger med elementer x_n og y_n vides, at $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$, samt at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \end{aligned}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Vis ved induktion, at der for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gælder

$$x_n^2 + y_n^2 = 5^n.$$

OPGAVE 5.

Lad Σ være alfabetet $\{a, b\}$ og n et af tallene $0, 1, 2, \ldots$.

En ikke-orienteret graf G_n defineres ved, at dens knudepunkter er elementerne i Σ^n, og at w_1 og w_2 naboer, hvis og kun hvis w_1 kan omformes til w_2 ved at et enkelt a i w_1 ændres til et b eller omvendt. (Altså er f.eks. *abba* og *abaa* naboer i G_4).

Vis at G_n er sammenhængende, og undersøg for hvilke værdier af n, der findes en Euler rundtur i G_n.

OPGAVE 6.

Lad M være mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og R relationen på M svarende til afbildningen f defineret ved $f(i) = 6 - i$.

(1) Find den Boole'ske matrix, der repræsenterer relationen R.

(2) Karakteriser samtlige Boole'ske matricer, der på lignende måde repræsenterer afbildninger $g : M \to M$.

(3) Forklar hvorfor disse Boole'ske matricer danner en semigruppe med Boole'sk multiplikation som komposition.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

To ikke-orienterede grafer er givet ved matricerne $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vis at de to grafer er isomorfe.

OPGAVE 8.

Vi har brugt Warshall's algoritme på en vægtet, orienteret graf og er endt med minimal-vægtmatricen

$$\mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Forklar hvorfor $\mathbf{W}^*$ ikke ændres, hvis vægten $W_{3,4}$ af kanten fra punkt 3 til punkt 4 ændres til et tal større end 5.

(2) Forklar hvorfor man kun behøver at køre den ydre løkke i algoritmen igennem for $k = 4$, hvis $W_{3,4}$ ændres til et tal mellem 0 og 5.

(3) Find $\mathbf{W}^*$ efter $W_{3,4}$ er ændret til 3.