Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1991.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Omskriv de sammensatte udsagn

$$q \leftrightarrow r \quad \text{og} \quad p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

så kun konnektiverne $\vee$ og $\neg$ benyttes.

OPGAVE 2.

Lad n være et positivt heltal. På mængden $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ defineres en binær operation $\diamond$ ved

$$i \diamond j = | i - j | \,.$$

(1) Er $\diamond$ **kommutativ**, dvs.gælder $s \diamond t = t \diamond s$ for alle $s, t \in S$?

(2) Vis, at der findes et **neutralt** element e, dvs. et $e \in S$, så $e \diamond s = s \diamond e$ for alle $s \in S$.

(3) Findes for hvert $s \in S$ et **inverst** element s^{-1}, så $s \diamond s^{-1} = s^{-1} \diamond s = e$?

(4) Er $(S, \diamond)$ en semigruppe ?

(5) Er $(S, \diamond)$ en gruppe ?

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Om en talfølge med elementer a_n vides, at $a_0 = 2$ og $a_1 = 2$, samt at $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n - 1$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Vis, at a_n for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ giver rest 2 ved division med 3.

OPGAVE 4.

Lad Σ være et alfabet, og antag $a, b \in \Sigma$. En operation $'$, der til alle elementer $w \in \Sigma^*$ knytter et $w' \in \Sigma^*$, defineres rekursivt ved

$\epsilon' = \epsilon$ og
$(xw)' = xxw'$, hvis $x \in \Sigma$ og $w \in \Sigma^*$.

(1) Udregn a', $(ab)'$, og $(aab)'$.

(2) Giv en beskrivelse af den definerede operation.

(3) Giv et induktionsbevis for, at længden af w' er dobbelt så stor som længden af w for alle $w \in \Sigma^*$.

OPGAVE 5.

Lad Σ være et alfabet og $\preceq$ relationen på Σ^* defineret ved, at $x \preceq y$ hvis og kun hvis der findes $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, så

$$w_1 x w_2 = y.$$

(1) Begrund, at $\preceq$ er en partiel ordning.

(2) Begrund, at enhver kæde i Σ^* er velordnet.

(3) Begrund, at to elementer $x, y \in \Sigma^*$ altid har mindst én nedre grænse og mindst én øvre grænse.

(4) Begrund, at to elementer $x, y \in \Sigma^*$ ikke behøver at have en største nedre grænse eller en mindste øvre grænse.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 6.

Lad R være en relation med Boole'sk matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegn orienterede grafer, der illustrerer relationerne R og R^{-1}, og vis, at graferne er isomorfe.

OPGAVE 7.

Lad G være den komplette graf med punkter $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ og vægte defineret ved

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{|i-j|},$$

hvor e_{ij} er kanten fra v_i til v_j.
Find et minimalt udspændende træ i G.

OPGAVE 8.

I en vægtet (ikke-orienteret) graf er **længden** af en sti summen af vægtene af stiens kanter. **Afstanden** mellem to punkter er den mindste længde af en sti, der forbinder punkterne. Grafens **diameter** er den største afstand mellem to punkter i grafen.

Forklar hvorledes Warshall's algoritme kan benyttes til at finde diameteren af en vægtet graf.