Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1991.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Gør rede for hvilke af følgende to udsagn, der er tautologier

$$(p \to q) \vee (q \to p)$$
$$(\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to p)) \to \neg r \wedge r$$

OPGAVE 2.

Der er givet en mængde M. Lad G være mængden af afbildninger $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, der til delmængder af M knytter delmængder af M og opfylder

$$f(X) \subseteq X$$

for alle $X \in \mathcal{P}(M)$.
(1) Giv en beskrivelse af G, når M har netop ét element a.

I de følgende tre spørgsmål er M en vilkårlig ikke-tom mængde:

(2) Vis, at hvis man sammensætter to afbildninger i G, så får man pany en afbildning i G, dvs. at $(G, \circ)$ er en semigruppe.
(3) Har denne semigruppe et neutralt element ?
(4) Er den en gruppe ?

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Om en talfølge med elementer a_n vides, at $a_0 > 1$ og $a_1 > 2$, samt at $a_{n+2} > a_n + a_{n+1}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vis, at der for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gælder, at

$$a_n > (3/2)^n.$$

OPGAVE 4.

Lad Σ være et alfabet, $A = (\Sigma^2)^*$, og $B = \Sigma(\Sigma^2)^*$.

(1) Giv en beskrivelse af A og B for $\Sigma = \{a, b\}$.

(2) Vis, at der i almindelighed gælder, at

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \\ A \cup B &= \Sigma^* \\ A^2 &= A \\ B^2 &\subseteq A \\ B^2 &\neq A. \end{aligned}$$

OPGAVE 5.

Lad M være en *endelig*, ikke-tom mængde og $f : M \to M$ en afbildning af M ind i M. Lad G være den orienterede graf med knudepunkter M for hvilken der går en kant fra u til v, hvis $v = f(u)$.

(1) Udnyt at M er endelig til at vise, at G indeholder mindst én orienteret kreds.

(2) Vis, at G kan være sammenhængende uden at være stærkt sammenhængende.

OPGAVE 6.

Lad G være en endelig, vægtet, ikke-orienteret, sammenhængende graf, i hvilken kant e har mindre vægt end alle de øvrige kanter.

Vis at ethvert minimalt udspændende træ T indeholder kanten e. (F.eks. ved at vise, at enhver kant i den entydigt bestemte sti i T, der forbinder e's endepunkter, kan udskiftes med e uden at T ophører med at være et træ).

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

Relationen R er fastlagt på mængden $\{1,2,3,4,5\}$ ved at xRy betyder $y = x + 2$.

(1) Opskriv den Boole'ske matrix $\mathbf{A}$ for R.

(2) Opskriv de Boole'ske matricer $r(\mathbf{A})$, $s(\mathbf{A})$ og $t(\mathbf{A})$.

(3) Opskriv den Boole'ske matrix for den mindste ækvivalensrelation, der indeholder relationen R, og angiv en graf, der illustrerer ækvivalensrelationen.

OPGAVE 8.

For byerne a, b, c, d og e er opgivet følgende tabel for afstande mellem byerne ad landeveje, der forbinder byerne

	a	b	c	d	e
a		30	70	120	52
b			40	90	82
c				50	110
d					60

En af afstandene fra a svarer til en omvej gennem forkerte byer. Benyt Dijkstra's algoritme til at finde minimalafstande fra a, og find derved, hvilken opgiven afstand, der er for stor.

For hver gang løkken i algoritmen er gennemløbet angives i besvarelsen mængden E af byer for hvilke minimalafstanden til E er fundet, samt tabellen D med de foreløbigt fundne minimalafstande.

(Algoritmen skal anvendes på den orienterede graf med knudepunkter $\{a, b, c, d, e\}$, hvor der fra hvert knudepunkt er en kant til hvert af de andre knudepunkter med den opgivne kilometerafstand som vægt).